

TMV141 Linjär algebra E, vt 13

Vecko-PM läsvecka 6

Lay: 6.1-6.6 Ortogonalitet, projektion och minstakvadratmetoden, 7.1-7.2 Symmetriska matriser, diagonalisering, kvadratiske former.

I kapitel 6.1 införs *skalärprodukt* (dot product) och *längd*, eller *norm*. Begreppet *ortogonalitet* är viktigt. *Ortogonal komplementet* till ett underrum i $\mathbb{R}^n$ är ett begrepp som generaliserar normalen till ett plan genom origo.

I avsnitt 6.2 är begreppen *ortogonal bas* och *ortonormerad bas* (eller ON-bas) viktiga. Många räkningar förenklas betydligt om man arbetar i en ortogonal bas. Exempelvis visar sats 6.2.5 hur lätt det är att bestämma koordinater i en ortogonal bas. Begreppet *ortogonal matris* som införs i slutet av 6.2 kommer att användas i kapitel 7.

I 6.4 ges Gram-Schmidt-processen för att stegvis bestämma en ortogonal bas för ett underrum W då man har en annan bas för W . Idén är enkel, det gäller att i varje steg ersätta en vektor i basen med en som är ortogonal mot de redan bestämda vektorerna i den sökta ortogonala basen.

I avsnitt 6.5 ges den mycket använda *minstakvadrat-metoden* för att finna *bästa möjliga lösning* till ett ekvationssystem *som saknar lösning*. I synnerhet handlar det då om överbestämda system, sådana med fler ekvationer än obekanta. I Matlab ges denna "lösning" till ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ av $\mathbf{x} = A \backslash \mathbf{b}$. Sats 6.5.13 ger metoden. I sats 6.5.14 är det viktigt att veta att om kolonnerna i A är linjärt oberoende så har ekvationen i sats 6.5.13 entydig lösning. I avsnitt 6.6 tillämpas metoden på anpassning av en kurva till mätpunkter, se även datorlab 4.

I kapitel 7.1 studeras diagonalisering av reella symmetriska matriser, alltså matriser som uppfyller $A^T = A$. Spänningsmatrisen S , som vi nämnde i förra vecko-PM, är alltid symmetrisk. Många andra tillämpningar leder också till symmetriska matriser så resultaten i kapitlet är mycket användbara. Sats 2 och 3 är mycket viktiga. De säger bland annat att symmetriska matriser alltid är diagonaliserbara. Om A är en symmetrisk $n \times n$ -matris så finns det till och med en ortonormerad bas för $\mathbb{R}^n$ som består av egenvektorer till A . Man kan då skriva $A = PDP^{-1} = PDP^T$ med basbytesmatrisen P ortogonal, vilket vi utnyttjade redan i datorlab 3.

I kapitel 7.2 studerar vi kvadratiske former – funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$ som ges av ett andragradspolynom som endast har termer av grad två, t.ex. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_3^2$. Sådana funktioner passar in i denna kurs genom att de ges av en matris A , $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$. Matrisen A är inte entydigt bestämd, men det finns en entydigt bestämd *symmetrisk* matris som ger f . Att alla symmetriska matriser kan diagonaliseras innebär att man alltid kan göra ett koordinatbyte som förenklar funktionsuttrycket. I exemplet med spänningsmatris ges normalspänningen på en viss snittyta med enhetsnormalvektor $\mathbf{n}$ av $\sigma = \mathbf{n}^T S \mathbf{n}$. Detta är alltså en kvadratisk form, diagonalisering visar hur normalspänningen i en viss riktning samspelar med huvudspänningarna. Som vi skall se i flervariabelanalysen är diagonalisering av kvadratiske former också fundamentalt för extremvärdesundersökningar i flera variabler.

Lärsmål:

För att bli godkänd på kursen skall du kunna:

Lay	Mål
6.1	beräkna skalärprodukten av två vektorer i $\mathbb{R}^n$, tillämpa räkneregler för skalärprodukt, beräkna norm av en vektor i $\mathbb{R}^n$ och beräkna avståndet mellan vektorer i $\mathbb{R}^n$.
6.1	avgöra om två vektorer i $\mathbb{R}^n$ är ortogonala
6.1	bevisa Pythagoras sats i $\mathbb{R}^n$.
6.1	förklara vad som menas med $W^\perp$ om W är ett underrum i $\mathbb{R}^n$
6.1	tillämpa sats 6.1.3 vid problemlösning.
6.2	förklara vad som menas med <i>ortogonal bas</i> för ett underrum W och tillämpa sats 6.2.5 för beräkning av koordinaterna för en vektor $\mathbf{y} \in W$ relativt en ortogonal bas för W .
6.2	använda projektnsformeln 6.2(2) i problemlösning
6.2	förklara vad som menas med <i>ortonormerad bas</i> för ett underrum W .
6.2	förklara vad som menas med en ortogonal matris.
6.3	tillämpa sats 6.3.8 för att dela upp en vektor i ortogonala komponenter, en i W och den andra i $W^\perp$ då en ortogonal bas för W är känd.
6.4	tillämpa Gram-Schmidt processen för att bestämma en ortogonal bas för ett underrum W i $\mathbb{R}^n$ utgående från en annan bas för W .
6.5	förklara vad som menas med en minstakvadrat-lösning
6.6	tillämpa minstakvadrat-metoden för modellanpassning.
7.1	tillämpa satserna 7.1.1 – 7.1.3 vid problemlösning.
7.2	tillämpa sats 7.2.4 (Satsen om principalaxlar) för att skriva en kvadratisk form utan blandade termer.

För överbetyg skall du också kunna:

Lay	Mål
6.1	bevisa sats 6.1.3.
6.2	bevisa sats 6.2.4: en ortogonal mängd av vektorer är linjärt oberoende.
6.2	bevisa sats 6.2.7 då U är en ortogonal matris.
6.4	förklara varför Gram-Schmidt processen leder till en ortogonal bas.
6.5	förklara varför minstakvadrat-lösningarna är lösningarna till den normaliserade ekvationen $A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$.
7.2	förklara vad som menas med positivt definit, negativt definit och indefinit kvadratisk form och tillämpa sats 7.2.5 för klassificering av kvadratiske former.

Rekommenderade uppgifter

(PP är förkortning av Practice problems. Här menas att du bör inleda med att göra alla dessa. Du hittar dem direkt före övningarna till respektive avsnitt.)

Avsnitt	Godkäntnivå		Överbetygsnivå
	Instuderingsuppgifter	Träningsuppgifter	
6.1	PP, 1, 6, 8, 11, 13, 15	17, 19, 24, 26	28, 29, 30
6.2	PP, 3, 5, 9, 11	17, 21, 23, 27	29, 33
6.3	PP, 1, 3, 5	9, 11, 15, 21	23
6.4	PP, 1, 5	3, 9, 11, 17ab	22
6.5	PP, 3, 5, 7	9, 13, 17	19
6.6	PP, 1, 4	7, 10	15, 16
7.1	PP, 1 - 11	15, 17, 24, 26	28, 29, 35
7.2	PP, 1, 3, 5	7	9, 21a-e, 22