

Ordinära differentialekvationer 3

Vi har använt Eulers metod för att lösa begynnelsevärdesproblem för ordinära differentialekvationer. Vi ska nu tillämpa denna metod på ett problem från termodynamiken, *värmeledning i en dimension*.

1.1 Värmeledningsekvationen

Från termodynamiken vet vi att om vi betraktar värmeledning i en stång med längd L kommer värmemängden Q :s förändring per tidsenhet, $\dot{Q}$, bestå av en balans mellan yttre värmetillförsel per längdenhet, q , och värmefflöde genom stångens ändar (vi antar att stången är isolerad på övriga sidor) så att

$$\dot{Q} = \int_0^L q \, dx - h(0) + h(L)$$

där h betecknar värmefflödet (positivt i positiv x -riktning). Vi kan nu använda oss av att

$$h(L) - h(0) = \int_0^L \frac{dh}{dx} \, dx,$$

och om vi betraktar en stationär situation där värmemängden inte ändras (dvs. det är balans mellan tillfört värme och bortlett värme) har vi

$$\int_0^L \frac{dh}{dx} \, dx = \int_0^L q \, dx.$$

För att kunna beräkna vad detta innebär för temperaturen T i stången måste vi också ha en ekvation som relaterar temperatur till värmefflöde. Enligt entropilagen måste födet gå från varmare områden till kallare områden, och en enkel modell för detta är *Fouriers lag*

$$h = -k \frac{dT}{dx},$$

där k kallas *värmekonduktiviteten* (per areaenhet i detta fall). Notera att det följer ur Fouriers lag att flödet går i motsatt riktning till ökande temperatur, som entropilagen kräver.

Alltså har vi sambandet

$$- \int_0^L \frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) \, dx = \int_0^L q \, dx.$$

Vi tecknade sambandet för hela stången, men samma argument gäller naturligtvis för varje liten bit $[a, a + \delta]$, med längd δ , så att

$$- \int_a^{a+\delta} \frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) \, dx = \int_a^{a+\delta} q \, dx.$$

och därför, med användande av medelvärdessatsen för integraler, gäller

$$- \frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) = q, \quad 0 < x < L.$$

Detta är inte ett begynnelsevärdesproblem. Vid integration två gånger får vi två integrationskonstanter som skall bestämmas och det görs genom att man antingen vet temperaturen *eller* värmefflödet vid $x = 0$ och vid $x = L$. Pga detta kallas problemet ett (tvåpunkts) *randvärdesproblem*.

¹2007-11-27 /Peter

1.2 Inskjutningsmetoden

För kunna använda en begynnelsevärdeslösare som `ode45`, framlänges Euler eller mittpunktsmetoden krävs ett trick. Först skriver vi om den andra ordningens differentialekvationen som ett system av första ordningens differentialekvationer genom att sätta $u_1 = T(x)$ och $u_2 = -ku_1'(x)$, alltså

$$\begin{aligned}u_1'(x) &= -\frac{1}{k}u_2, \\ u_2'(x) &= q.\end{aligned}\tag{1}$$

Vi ska sedan betrakta specialfallet där temperaturen $u_1 = T$ är känd vid $x = 0$ och vid $x = L$ närmare bestämt

$$u_1(0) = 0 \quad \text{och} \quad u_1(L) = 0.$$

För att kunna använda en begynnelsevärdeslösare behöver vi veta $u_1(0)$ och $u_2(0)$, men vi vet tyvärr inte vad $u_2(0)$ ska vara. Vi kan då ta till följande trick:

- Betrakta $u_2(0)$ som en *variabel* som vi för enkelhets skull kan döpa till s , dvs. $s = u_2(0)$.
- För varje val av s får vi ett värde på $u_1(L)$ genom att lösa begynnelsevärdesproblemet (1) med initialdata

$$u_{\text{in}} = \begin{bmatrix} 0 \\ s \end{bmatrix}.$$

från $x = 0$ till $x = L$.

- Därför kan vi betrakta $u_1(L)$ som en *funktion* av s , $u_1(L) = f(s)$, där f visserligen inte kan skrivas upp explicit, men vars värde likväl kan beräknas för varje s .
- Vi vill nu lösa ekvationen $f(s) = 0$, ty vi vill ha $u_1(L) = 0$.

Vi kan inte beräkna $f'(s)$ analytiskt, så för att lösa ekvationen $f(s) = 0$ får vi ta till Newtons metod med numerisk approximation av derivatan på samma sätt som i förra läsperioden.

Välj alltså ett startvärde på s och approximerar derivatan genom att lösa begynnelsevärdesproblemet två gånger, t.ex. med $\delta = 10^{-5}$ och

$$u_{\text{in},v} = \begin{bmatrix} 0 \\ s - \delta \end{bmatrix}, \quad u_{\text{in},h} = \begin{bmatrix} 0 \\ s + \delta \end{bmatrix}.$$

Funktionsvärdena är $f_v = u_{1,v}(L)$ och $f_h = u_{1,h}(L)$ som fås genom att lösa (1) två gånger med de två begynnelsevärdena. Den approximativa derivatan blir sedan

$$f'(s) \approx \frac{f_h - f_v}{2\delta}.$$

Lösningen av $f(s) = 0$ består alltså av en snurra som utgör Newtons metod och varje gång man behöver $f(s)$ måste begynnelsevärdesproblemet (1) lösas. Du har redan skrivit en Newtonlösare `newton` i förra läsperioden; använd den och din egen Euler-framåt-lösare `myode`, för att lösa problemet.

Övning 1. Skriv ett program som löser (1) med den metod som beskrivits ovan med för en stång med längd $L = 1$. För att kunna använda dina egna program `newton` och `myode` behöver du

1. Skriv en fil `varme.m` (facit) som beskriver differentialekvationen (1) och som skall användas av `myode` med givet s enligt

```
[x,u]=myode(@varme,[0,1],[0;s],h);
```

2. Skriv en fil `randvarde.m` (facit) som skall användas av `newton` med startgissning s_0 på $u_2(0)$ enligt

```
s=newton(@randvarde,s0,1e-6);
```

I **randvarde** skall alltså begynnelsevärdesproblemet (1) lösas med indata $s = u_2(0)$ och returnera $y = u_1(1)$. På kommandoraden anropar du sedan **newton** som anropar **randvarde** som anropar **myode**. När du väl fått det riktiga värdet på s kan du lösa (1) en sista gång och plotta resultatet.

Prova först med ett problem med känd lösning: om $k = 1$ och $q = x$ blir

$$T = \frac{x(1 - x^2)}{6}$$

(visa detta). Kontrollera att den numeriska lösningen ligger nära den exakta. prova sedan ett problem (med samma q) där stången består av två olika material, $k = 1$ om $x < 1/2$, $k = 10$ om $x \geq 1/2$. Kan du tolka resultatet fysikaliskt?