DUGGA

TMV151
Matematisk analys i en variabel M1, 2016–11–22
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje rätt svar ger 1 bonuspoäng på tentan. ANGE ENDAST SVAR PÅ UPPGIFTERNA.

Namn:...**Antagningsår**..........................

Personnummer:..**Email**...

1. Givet $f(x) = 1 - x$ och en partition av intervallet $[0, 1]$ i n lika långa delintervall, beräkna den övre Riemannsumman (uttryckt i termer av n).
Lösn. Låt $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, \ldots, n$. Eftersom funktionen är avtagande fås maximum i varje delintervall $[x_{i-1}, x_i]$ i den vänstra punkten x_{i-1}. Den övre Riemannsumman ges därför av $U(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n}(1 - \frac{i-1}{n})\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1} i = 1 - \frac{n-1}{2n} = \mathbf{\frac{1}{2}} + \mathbf{\frac{1}{2n}}$.

2. Beräkna integralen $\int_0^{\pi/2} \sin(x)^2 \cos(x)\, dx$.
Lösn. Vi gör substitutionen $u = \sin(x)$, $du = \cos(x)\, dx$, $u(0) = 0$ och $u(\pi/2) = 1$,

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)^2 \cos(x)\, dx = \int_0^1 u^2\, du = \mathbf{\frac{1}{3}}.$$

3. Beräkna integralen $\int_1^2 \frac{1}{x(1+x)}\, dx$.
Lösn. Partialbråksuppdelninig ger $\frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}$. Primitivfunktionen ges därför av $\log|x| - \log|1 + x| = \log|\frac{x}{1+x}|$. Vi får $\int_1^2 \frac{1}{x(1+x)}\, dx = \log(\frac{2}{3}) - \log(\frac{1}{2}) = \log(\mathbf{\frac{4}{3}})$.

4. Låt R vara en kvadrat med hörn i punkterna $(2, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$ och $(3, 1)$. Beräkna volymen av den kropp som bildas då kvadraten R roterar runt y-axeln.
Lösn. Centroiden är $(2, 1)$, dess avstånd till y-axeln 2. Arean av kvadraten är 2. Pappus sats ger $V = 2\pi \cdot 2 \cdot 2 = \mathbf{8}\pi$.

5. Använd mittpunktsregeln för att approximera $\int_0^1 x^2\, dx$ med två lika långa delintervall.
Lösn. $M_2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{16} + \frac{9}{16}) = \mathbf{\frac{5}{16}}$.

6. Beräkna centroiden hos det område som begränsas av $x = -1$, $x = 1$, $f(x) = 1 - x^2$ och x-axeln.
Lösn. Symmetri ger $\bar{x} = 0$. $M_{y=0} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1 - x^2)^2\, dx = \int_0^1 (1 - x^2)^2 = \frac{8}{15}$. $A = \frac{-1}{1}(1 - x^2)\, dx = \frac{4}{3}$. Alltså $\bar{y} = \frac{2}{5}$. Vi får $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = (\mathbf{0}, \mathbf{\frac{2}{5}})$.

7. Beräkna längden av kurvan $f(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}$ mellan $x = 0$ och $x = 1$.
Lösn. Vi får $s = \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + x}\, dx = \int_1^2 \sqrt{u}\, du = \mathbf{\frac{2}{3}}(\mathbf{2^{3/2}} - \mathbf{1})$.
`/axel`