DUGGA

TMV151
Matematisk analys i en variabel M1, 2015–11–24
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje rätt svar ger 1 bonuspoäng på tentan. ANGE ENDAST SVAR PÅ UPPGIFTERNA.

Namn:...**Antagningsår**...........................

Personnummer:..**Email**...

1.
Givet $f(x) = x(1-x)$ och partitionen $P = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ beräkna den övre Riemann summan.
Lösn. $U(f,P) = \frac{1}{2}(f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2})) = \frac{1}{4}$.

2. Beräkna integralen $\int_0^1 x\cos(x)\,dx$.
Lösn. $\int_0^1 x\cos(x)\,dx = [x\sin(x)]_0^1 - \int_0^1 \sin(x)\,dx = \sin(1) + \cos(1) - 1$.

3. För vilka $k \in \mathbb{R}$ är $\int_1^\infty \frac{1}{x^k}\,dx < \infty$.
Lösn. Sats 6.2 ger att $k > 1$.

4. Låt R vara en triangel med hörnen i punkterna $(1,0)$, $(2,0)$ och $(1,1)$. Beräkna (genom att tex använda Pappus sats) volymen av den kropp som bildas då triangeln R roterar runt y-axeln.
Lösn. Triangelns area är $A = \frac{1}{2}$, triangelns centroid är $(\bar{x},\bar{y}) = (\frac{1+2+1}{3}, \frac{0+0+1}{3}) = (\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$, det vinkelräta avståndet till y-axeln är $\bar{r} = \bar{x} = \frac{4}{3}$. Sträckan centroiden färdas är $2\pi\bar{r} = \frac{8\pi}{3}$. Volymen är då $V = 2\pi\bar{r}A = \frac{4\pi}{3}$.

5. Använd trapetsregeln för att approximera $\int_0^1 e^x\,dx$ med två lika långa delintervall.
Lösn. $T_2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}e^0 + e^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}e) = \frac{1}{4}(1 + 2\sqrt{e} + e)$.

6. Beräkna volymen av rotationskroppen som uppkommer då $f(x) = e^x$ roterar kring x-axeln för $0 \le x \le 1$.
Lösn. $V = \pi\int_0^1 e^{2x}\,dx = \frac{\pi(e^2-1)}{2}$.

7. Beräkna längden av kurvan $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\log(x)$ mellan $x = 1$ och $x = 2$.
Lösn. $L = \int_1^2 \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx = \int_1^2 \sqrt{1 + (x - \frac{1}{4x})^2}\,dx = \int_1^2 \sqrt{1 + x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2}}\,dx = \int_1^2 \sqrt{(x + \frac{1}{4x})^2}\,dx = \int_1^2 x + \frac{1}{4x}\,dx = \frac{3}{2} + \frac{1}{4}\log(2)$.

/axel