MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Axel Målqvist
Telefonvakt: Edvin Wedin, tel. 031–7725325

TMV151
2016–08–15 kl. 8.30–12.30 (SB)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV151 Matematisk analys i en variabel M

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilket tillsammans ger maximala 50p. Till detta läggs bonuspoäng (maximalt 7p). Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet. Granskningstillfälle kommer meddelas på hemsidan.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Lycka till!

Axel

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Axel Målqvist
Telefonvakt: Edvin Wedin, tel. 031–7725325

TMV151
2016–08–15 kl. 8.30–12.30 (SB)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV151 Matematisk analys i en variabel M

Tentamensuppgifter

---

1. Beräkna gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{3i}{n}$. (3p)
Lösn. Vi har $I_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{3i}{n} = \frac{3n(n+1)}{2n^2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2n}$. Gränsvärdet blir därför $\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{3}{2}$.

2. Beräkna $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$. (3p)
Lösn. Vi låter $y = 1 - x^2$ och får,

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_1^0 \frac{1}{-2} y^{1/2}\,dy = \frac{1}{3}.$$

3. Beräkna en approximation till integralen $\int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx$ med mittpunktsmetoden. Använd fyra delintervall. (3p)
Lösn. $M_4 = \frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{4} \sin((i\pi)/2 - \pi/4) = 0$.

4. För vilka p är $\int_0^1 x^{p-1}\,dx$ konvergent? (3p)
Lösn. Vi har divergens för $p \le 0$ men för $p > 0$ har vi $\int_0^1 x^{p-1}\,dx = [\frac{x^p}{p}]_0^1 = \frac{1}{p}$.

5. Beräkna volymen hos den kropp som bildas då området som begränsas av $y = x^3$ och $y = 2$ roterar runt y-axeln. (3p)
Lösn. Volymen ges av

$$V = \pi\int_0^2 y^{2/3}\,dy = \pi[\frac{3}{5}y^{5/3}]_0^2 = \frac{6\pi 2^{2/3}}{5}.$$

6. Lös differentialekvationen $\cos(y)y' = x$ med $y(0) = \pi/4$. (3p)
Lösn. Variabelseparation ger

$$\sin(y) = \int \cos(y)\,dy = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C.$$

Begynnelsevillkoret ger $\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin(\pi/4) = C$. Vi får $y(x) = \arcsin(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}})$.

7. Lös differentialekvationen $x^2y''(x) + xy'(x) - y(x) = 0$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 0$. (3p)
Lösn. Vi ansätter $y(x) = x^r$ och får den karaktäristiska ekvationen $0 = r(r-1) + r - 1 = r^2 - 1$ vilket ger lösning

$$y(x) = Ax + \frac{B}{x}.$$

Konstanterna ges av begynnelsevillkoret $A = B = 1$ alltså $y(x) = x + \frac{1}{x}$.

8. Beräkna centroiden av det område i planet som begränsas av $y = \sqrt{1-x^2}$ och $y = 0$. (3p)
Lösn. x komponenten blir 0 på grund av symmetri. Arean ges av $\pi/2$. Momentet i y-les $M_{y=0} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1 - x^2\,dx = \frac{2}{3}$. Centroiden ges av $(x_p, y_p) = (0, \frac{4}{3\pi})$.

9. Beräkna längden av kurvan $y(x) = x^{2/3}$ mellan $x = 1$ och $x = 8$. (3p)
Lösn. Derivatan ges av $\frac{2}{3}x^{-1/3}$. Längden blir

$$\int_1^8 \sqrt{1 + \frac{4}{9}x^{-2/3}}\, dx = \int_1^8 \frac{\sqrt{9x^{2/3}+4}}{3x^{1/3}}\, dx = [u = 9x^{2/3}+4] = \frac{1}{18}\int_{13}^{40} u^{1/2}\, du = \frac{40^{3/2} - 13^{3/2}}{27}$$

10. Beräkna Laplacetransformen av $f(t) = t$, alltså beräkna $F(s) = \int_0^\infty e^{-st}t\, dt$, där $\mathrm{Re}(s) > 0$. (3p)
Lösn. Vi använder partiell integration och noterar att randbidragen blir noll. $F(s) = \int_0^\infty e^{-st}t\, dt = \frac{1}{-s}\int_0^\infty e^{-st}\, dt = \frac{1}{s^2}$.

---

11. Skriv en Matlab rutin `riemann.m` som beräknar den övre Riemann summan av funktionen $f(x) = e^x$ mellan $x = 0$ och $x = 1$ med n delintervall. (5p)
Lösn. Vi noterar att e^x är växande.

```
function S=riemann(n)
x = 0; S = 0;
while x < 1
  x = x + 1/n;
  dS = exp(x)/n;
  S = S + dS;
end
```

12. Formulera och bevisa analysens fundamentalsats. (5p)
Lösn. Se Adams/Essex Sats 5.5.

13. Låt exponentialfunktionen $y(x) = e^x$ vara definierad som lösning till ekvationen $y'(x) = y(x)$, med begynnelsevillkoret $y(0) = 1$. Visa utifrån denna definition att $y(x)^2$ löser ekvationen $y'(x) = 2y(x)$, där $y(0) = 1$. (5p)
Lösn. Vi har att $(y^2)' = 2yy' = 2(y^2)$ dessutom $(y^2)(0) = y(0)^2 = 1$.

14. Skriv som system av första ordningen och genomför en iteration av framåt Euler metoden för differentialekvationen $y''(x) + 3(y'(x))^2 = x^2$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$, med steglängd $h = 0.1$. (5p)
Lösn. Vi låter $y_1 = y$ och $y_2 = y'$. Systemet blir då:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ x^2 - 3y_2^2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} y_1(1) \\ y_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Med $x_n = 1 + nh$, $n = 0, 1, \ldots$, ges Framåt Euler lösningen av:

$$\begin{bmatrix} y_1^{n+1} - y_1^n \\ y_2^{n+1} - y_2^n \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} y_2^n \\ (x_n)^2 - 3(y_2^n)^2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Därför får vi

$$\begin{bmatrix} y_1^1 \\ y_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.1 \end{bmatrix}.$$

TMV151 Matematisk analys i en variabel M

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	**Svar**	**Poäng**
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		