* Idag:

* Partiell integration

* Andra metoder för att beräkna integraler

* Generaliserade integraler

Kapitel 6.1-2, 6.5

* Partiell integration

Vi kommer ihåg produktregeln för derivator

$$\frac{d}{dx}\left(U(x)V(x)\right) = U(x)\frac{d}{dx}V(x) + V(x)\frac{d}{dx}U(x)$$

Om vi integrerar på båda sidor

$$\int U(x)\frac{dV}{dx}\,dx = U(x)V(x) - \int V(x)\frac{dU}{dx}\,dx$$

Denna teknik är användbar om

$V(x)\frac{dU}{dx}(x)$ är en enklare integrand att hitta primitiv funktion till än $U(x)\frac{dV}{dx}(x)$

Ex: $\int xe^x\,dx = \left\{ \begin{array}{l} U(x)=x \\ V(x)=e^x \end{array} \right\} = xe^x - \int e^x\,dx = e^x(x-1) + C$

Ex: $\int \ln x \, dx = \left\{ \begin{matrix} U(x) = \ln x \\ V(x) = x \end{matrix} \right\} =$

$= x\ln x - \int x \cdot \frac{d}{dx} \ln x \, dx =$

$= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx =$

$= x \ln x - x + C$

Principer:

- Om den ena funktionen är polynom, låt den vara $U(x) \Rightarrow$ lägre grads polynom
- Om en logaritm eller arc-funktion ingår låt den vara $U(x) \Rightarrow$ enklare uttryck

* Reducerings formler

Låt $n \geq 0$ och studera

$I_n = \int x^n e^{-x} dx = \left\{ \begin{matrix} U(x) = x^n \\ V(x) = -e^{-x} \end{matrix} \right\} =$

$= -x^n e^{-x} - n\int x^{n-1}(-e^{-x}) dx =$

$= -x^n e^{-x} + n \int x^{n-1} e^{-x} dx$

Alltså $I_n = -x^n e^{-x} + n I_{n-1}$

Detta kallas en rekursiv relation

Vill vi beräkna I_3 börjar vi med

$I_0 = -e^{-x} + C$

$I_1 = -xe^{-x} + (-e^{-x} + C) = -e^{-x}(1+x) + C_1$

$I_2 = -x^2 e^{-x} + 2I_1 = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C_2$

$I_3 = -x^3e^{-x} + 3I_2 = -e^{-x}(x^3+3x^2+6x+6)+C_3$

* Integral av rationella funktioner

Vi vill studera $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, där P och Q är polynom. P/Q är en <u>rationell funktion</u>.

Om P har högre grad än Q genomförs polynomdivision först

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \text{polynom} + \frac{R(x)}{Q(x)} \quad \text{där grad } R < \text{grad } Q$$

<u>Ex</u>:

$$\frac{x^3+3x^2}{x^2+1} = \frac{x^3+x-x+3x^2+3-3}{x^2+1} = x+3-\frac{x+3}{x^2+1}$$

Vi kan fokusera på fallet grad P < grad Q

* Linjära och kvadratiska nämnare

$$\int \frac{c}{ax+b}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} u=ax+b \\ du=a\,dx \end{array} \right\} \frac{c}{a}\int\frac{du}{u} = \frac{c}{a}\ln|u|+C$$

Notera att $x^2+ax+b = \left\{y=x+\frac{a}{2}\right\} = y^2+b-\frac{a^2}{4} = y^2\pm c^2$

Vi får fyra fall:

(i) $\int \frac{x}{x^2+a^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} u=x^2+a^2 \\ du=2x\,dx \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)+C$

(ii) $\int \frac{x}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-a^2|+C$

(iii) $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

(iv) $\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \left\{ \frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x+a)(x-a)} = \frac{A}{x+a}+\frac{B}{x-a},\right.$

$A(x-a)+B(x+a) = 1 \Rightarrow A+B=0,\ a(B-A)=1,$

$\left. A=-\frac{1}{2a},\ B=\frac{1}{2a} \right\} = \frac{1}{2a}\int\frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a}\int\frac{dx}{x+a} =$

$= \frac{1}{2a}\ln|x-a| - \frac{1}{2a}\ln|x+a| + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

Tekniken vi använde kallas <u>partialbråksuppdelning</u>. Genom denna teknik kan alla rationella funktioner skrivas som summan av uttryck med linjära och kvadratiska nämnare.

Om $Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$ (distinkta)
gäller $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-a_n}$

Vid multipla nollställen, tex
$Q(x) = (x-a_1)^2 \cdot (x-a_3)$
blir ansatsen $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \frac{A_3}{x-a_3}$

<u>Ex</u>: $\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx = \left\{ \frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \right.$

$\Rightarrow 1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{ll} x^2: & 0 = A+B \\ x: & 0 = -2A - B + C \\ 1: & 1 = A \Rightarrow B = -1 \Rightarrow C = 1 \end{array}\right\} =$$

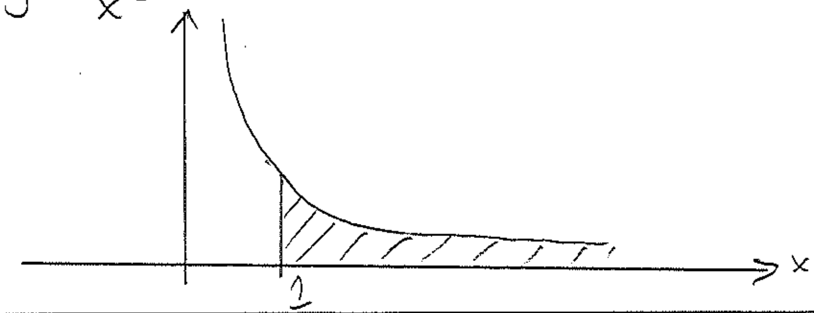
$= \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx = \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$.

* Generaliserad integral
$I = \int_a^b f(x)dx$

Två typer: (i) $a = -\infty$ och/eller $b = \infty$
(ii) f obegränsad

* Typ (i)

Ex: Beräkna arean under funktionen $y = \frac{1}{x^2}$ för $x \geq 1$



$$A = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{dx}{x^2} = \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^R =$$

$$= 1$$

Eftersom gränsvärdet finns säger vi att integralen <u>konvergerar</u>.

Ex: Låt nu $y = \frac{1}{x}$ och beräkna arean över x-axeln för $x \geq 1$.

$$A = \int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{dx}{x} = \lim_{R\to\infty} \ln x \Big|_1^R = \infty$$

Eftersom gränsvärdet inte existerar säger vi att integralen <u>divergerar</u>

* Typ (ii)

Låt f vara kontinuerlig på $(a,b]$ men obegränsad nära a. Vi definierar

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$$

och på motsvarande sätt nära b.

<u>Ex</u>: $A = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$, $f = \frac{1}{\sqrt{x}}$ är obegränsad i $a=0$.

$$A = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c\to 0^+} \left(2\sqrt{x}\right)\Big|_c^1 = 2$$

Integralen konvergerar.

Sats 6.2 p-integraler

Låt $0 < a < \infty$

(i) $\int_a^\infty x^{-p}\,dx$ $\begin{cases} \text{konvergerar till } \frac{a^{1-p}}{p-1}, & p>1 \\ \text{divergerar till } \infty & p\leq 1 \end{cases}$

(ii) $\int_0^a x^{-p}\,dx$ $\begin{cases} \text{konvergerar till } \frac{a^{1-p}}{1-p}, & p<1 \\ \text{divergerar till } \infty, & p\geq 1 \end{cases}$

Bevis:

(i) $p>1$: $\lim_{R\to\infty}\int_a^R x^{-p}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left(\frac{x^{1-p}}{1-p}\right)\Big|_a^R = \frac{a^{1-p}}{p-1}$

$p=1$: $\lim_{R\to\infty}\int_a^R x^{-1}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left(\ln x\right)\Big|_a^R = \infty$

$p<1$: $\lim_{R\to\infty}\int_a^R x^{-p}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left(\frac{x^{1-p}}{1-p}\right)\Big|_a^R = \infty$

(ii) $p<1$: $\lim_{c\to 0}\int_c^a x^{-p}\,dx = \lim_{c\to 0^+}\left(\frac{x^{1-p}}{1-p}\right)\Big|_c^a = \frac{a^{1-p}}{1-p}$

$p=1$: $\lim_{c\to 0}\int_c^a x^{-1}\,dx = \lim_{c\to 0^+}\ln x\Big|_c^a = \infty$

$p>1$: $\lim_{c\to 0}\int_c^a x^{-p}\,dx = \lim_{c\to 0^+}\left(\frac{x^{1-p}}{1-p}\right)\Big|_c^a = \infty$

Sats 6.3 Begränsning av integraler

Låt $-\infty \leq a < b \leq \infty$, f, g kontinuerliga på (a,b) $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Om $\int_a^b g(x)\,dx$ konvergerar så gör även $\int_a^b f(x)\,dx$ det och

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

P.s.s om $\int_a^b f(x)\,dx$ divergerar gör även $\int_a^b g(x)\,dx$ det.

Bevis: Bygger på bevis om den bestämda integralen och ingår inte.

Ex: Visa att $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ är konvergent

Vi vill använda att $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ $x \geq 1$

och $e^{-x^2} \leq 1$ $x < 1$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-x^2}dx \leq$$

$$\leq \int_0^1 1\,dx + \lim_{R\to\infty} \int_1^R e^{-x}dx =$$

$$= 1 + \lim_{R\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_1^R = 1 + \frac{1}{e}$$