

I dag

* System av första ordningen

* Existens och entydighet

* Högre ordningens ODE
som system av första ordningen.

Kapitel AM 1.2 - 1.4

* Allmänt system av 1:a ordningen
Ett system av n ekvationer med n okända

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} y_1(x) = f_1(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \\ \frac{d}{dx} y_2(x) = f_2(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) \\ \vdots \\ \frac{d}{dx} y_n(x) = f_n(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \end{cases}$$

$$y_j(0) = c_j, \quad 1 \leq j \leq n.$$

På vektorform får vi

$$\frac{d}{dx} \vec{y}(x) = \vec{f}(x, \vec{y}(x)), \quad \vec{y}(0) = \vec{c}.$$

där $\vec{f}$ har element f_i , $\vec{y}$ har element y_i och $\vec{c}$ element c_i
 $1 \leq i \leq n$

Ex: Volferra-Lotka's ekvation som modellerar rävar och kaniner.

Kaniner: $\frac{dx(t)}{dt} = x(t)(a - by(t))$, $x(0) = x_0$

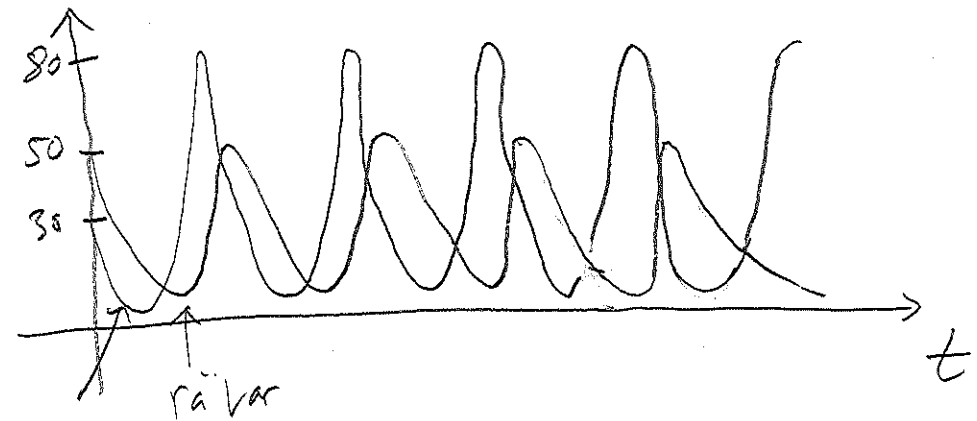
Rävar: $\frac{dy(t)}{dt} = -y(t)(c - dx(t))$, $y(0) = y_0$

* $ax(t)$ anger att populationen kaniner växer exponentiellt i avsaknad av rävar

* $-bx(t)y(t)$ påverkar antal kaniner negativt och mäter sannolikheten att kaniner träffar på rävar.

* $dx(t)y(t)$ på samma sätt men positivt för rävarna

* $-cy(t)$ anger rävarna exponentiellt i avsaknad av kaniner



kaniner
När rävarna ökar ökar kaninerna men då ökar rävarna igen.
Lösningen är periodisk.

* Existens och entydighet av lösning

Vi formulerar först en generalisering av Picards sats till n dimensioner.

En vektorvärd funktion $\vec{f}(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ av $n+1$ variabler är kontinuerlig om dess element $f_i, i=1, \dots, n$ är kontinuerliga

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{bmatrix}$$

$\vec{f}$ är Lipschitzkontinuerlig med avseende på $\vec{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$ om för varje $\vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ och $x \in \mathbb{R}$ gäller

$$\|\vec{f}(x, \vec{y}) - \vec{f}(x, \vec{z})\| \leq L \|\vec{y} - \vec{z}\|,$$

där $\|v\| = \max_{a \leq x \leq b} |\vec{v}(x)|$
 ↑ mäter längden av vektorn.

Sats AM1.4 Existens och entydighet
 Begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \vec{y}(x) = \vec{f}(x, \vec{y}(x)), & x \in \mathbb{R}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0, & \vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

där $\vec{f}$ är kontinuerlig och Lipschitzkontinuerlig med avseende på $\vec{y}$ har en entydig lösning för alla x .

Om $\vec{f}$ bara är Lipschitzkontinuerlig i ett område kring $\vec{y}_0$ gäller att det finns en entydig lösning i en omgivning till x_0 .

Detta resultat finns formulerat som Sats AM1.3.

Bevisen av satserna ligger utanför kursen och är markerade med * i boken.

Sats AM 1.4 ger att om $\vec{f}$ är en linjär funktion

$$\vec{f}(x, \vec{y}(x)) = A(x)\vec{y}(x) + b(x) \text{ att}$$

vi har existens av lösning för alla x eftersom linjära funktioner är Lipschitzkontinuerliga.

Ex: Låt $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

och $\vec{f}(x, \vec{y}) = A\vec{y}$. Visa att

$\vec{f}$ är Lipschitzkontinuerlig i $\vec{y}$.

Låt $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, $\vec{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$. Vi får

$$\|A\vec{y} - A\vec{z}\| = \left\| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \right\|$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} y_2 - z_2 \\ 2y_1 + y_2 - 2z_1 - z_2 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{(y_2 - z_2)^2 + (2y_1 + y_2 - 2z_1 - z_2)^2}$$

$$= \sqrt{(y_2 - z_2)^2 + (2(y_1 - z_1) + (y_2 - z_2))^2} \leq \sqrt{(y_2 - z_2)^2 + 4(y_1 - z_1)^2 + 4(y_2 - z_2)^2}$$

$$\leq \sqrt{4(y_2 - z_2)^2 + 4(y_1 - z_1)^2} = 2\sqrt{(y_2 - z_2)^2 + (y_1 - z_1)^2}$$

$$= 2\sqrt{(y_2 - z_2)^2 + (y_1 - z_1)^2} = 2\|\vec{y} - \vec{z}\|$$

$$= 2\|\vec{y} - \vec{z}\|$$

→ Högre ordningens ODE som system av första ordningen.

Sats A1.1

Låt $F(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ vara en funktion av $n+1$ variabler och $\{c_i\}_{i=0}^{n-1}$ en uppsättning reella tal. En n te ordningens ODE,

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= F(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n-1)}), \\ y^{(i)}(0) &= c_i, \quad i=0, \dots, n-1 \end{aligned}$$

kan skrivas som ett system av 1 :a ordningens ODE.

Bem: Låt $\vec{y}$ vara en kolumnvektor med komponenter $[y_1, y_2, \dots, y_n]$. Låt

$$y_i = y^{(i-1)}, \quad i=1, \dots, n, \quad y^{(0)} = y$$

Då får vi

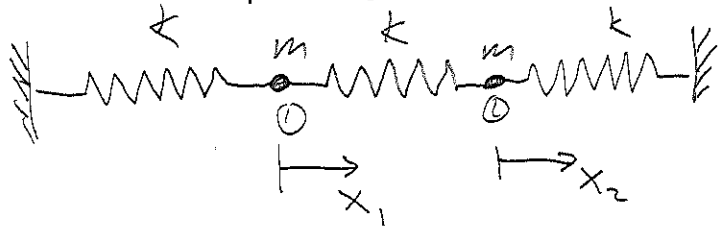
$$\begin{cases} \frac{d}{dx} y_1(x) = y_2(x) \\ \frac{d}{dx} y_2(x) = y_3(x) \\ \vdots \\ \frac{d}{dx} y_{n-1}(x) = y_n(x) \\ \frac{d}{dx} y_n(x) = F(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) \end{cases}$$

med begynnelsevillkor $y_i(0) = c_{i+1}$. $\square$

Högre ordningens ODE kan alltid skrivas om som system av första ordningen.

Existenssatsen A1.4 kan alltid tillämpas på en stor mängd problem.

* Tillämpningar: massor och fjädrar



Vi har $F = kx$ där x är avvikelsen från fjädrens jämviktsläge
 k fjäderkonstant,
 F kraft.

$$m\ddot{x}_1 = F = -kx_1 + k(x_2 - x_1)$$

$$m\ddot{x}_2 = F = -k(x_2 - x_1) - kx_2$$

Om $x_2 > x_1 \Rightarrow$ positiv kraft på ①
 och negativ på ②.

Låt nu $x_3 = \dot{x}_1$ och $x_4 = \dot{x}_2$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2k/m & k/m & 0 & 0 \\ k/m & -2k/m & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\vec{X}} = A\vec{X}, \vec{X}(0) = \vec{X}_0$$

Matlab löses detta med

$$[t, x] = \text{ode45}(@\text{funk}, [0 \ T], [0 \ 0 \ 1 \ -1]);$$

function xprim = funk(t, x)

$$x_{\text{prim}} = A * x;$$

ode45, ode23, ... fungerar bara på system av första ordningen, ej högre ordning. Därför måste högre ordnings ekvationer skrivas om enligt ovan.