

Idag

* Laplace transform

* Egenskaper

* Laplace transform av
derivata och integral

* Invers Laplace transform

AM 3.1-3.4

* Motiverande exempel (3.1)

$$y'(t) + y(t) = e^{-2t}, \quad y(0) = 0.$$

Vi vill lösa denna ODE analytiskt.

Vi multiplicerar med e^{-st} , $s > 0$ och integrerar $\int_0^\infty$. Vi antar

här vidare att integralerna är

konvergenta $\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} (|y'(t)| + |y(t)|) e^{-st} = 0$

$$\int_0^\infty y'(t) e^{-st} dt + \int_0^\infty y(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-2t} e^{-st} dt$$

Parhelt integration ger pga gränserna

$$\left[y(t) e^{-st} \right]_0^\infty + s \int_0^\infty y(t) e^{-st} dt + \int_0^\infty y(t) e^{-st} dt =$$

$$= \left[\frac{-1}{s+2} e^{-(s+2)t} \right]_0^\infty = \frac{1}{s+2}$$

Vi låter nu $Y(s) = \int_0^{\infty} y(t) e^{-st} dt$

$$s Y(s) + Y(s) = \frac{1}{s+2} \quad \text{eller}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s+2} \cdot \frac{1}{s+1} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2},$$

där $A(s+2) + B(s+1) = 1$ eller

$$A = -B, \quad 2A + B = 1, \quad B = -1, \quad A = 1$$

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}. \quad \text{Vi vill hitta}$$

$$y(t) \text{ s.a. } \int_0^{\infty} y(t) e^{-st} dt = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

Vi har redan att $\int_0^{\infty} e^{-2t} e^{-st} dt = \frac{1}{s+2}$

på samma sätt gäller $\int_0^{\infty} e^{-t} e^{-st} dt = \frac{1}{s+1}$

$$\int_0^{\infty} (e^{-t} - e^{-2t}) e^{-st} dt = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

och alltså $y(t) = e^{-t} - e^{-2t}$.

* Definition av Laplace transform

Låt $f(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ vara begränsad av $|f(t)| \leq C e^{at}$ för konstanter C, a .

Laplace transformen av f ges av

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) > a$$

Vi använder även notationen

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = F(s).$$

Sats A3.1 (Laplace transform väldefinierad)

Laplace transformen är väldefinierad för funktioner $|f(t)| \leq C e^{at}$ givet att

$\operatorname{Re}(s) > a$, alltså integralen

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \text{ är konvergent.}$$

Beris! Låt $s = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, $x = \operatorname{Re}(s) > a$ Ex: $f(t) = 1$, $t > 0$

$$\begin{aligned} |F(s)| &\leq \left| \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \right| \leq \int_0^\infty |e^{-(x+iy)t}| \cdot e^{at} dt \\ &\leq \int_0^\infty e^{-xt} |e^{-iyt}| \cdot e^{at} dt = \int_0^\infty e^{(a-x)t} dt = \\ &= \left[\frac{1}{a-x} e^{(a-x)t} \right]_0^\infty = \frac{1}{x-a} < \infty \end{aligned}$$

Ex: Låt $f(t) = e^t$. Därmed $|e^t| \leq C e^{at}$ med $C = a = 1$. Låt $\operatorname{Re}(s) > 1$. $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^t dt = \int_0^\infty e^{(1-s)t} dt$

$$= \left[\frac{1}{1-s} e^{(1-s)t} \right]_0^\infty = \frac{1}{s-1}$$

eftersom $|e^{(1-s)t}| = |e^{-iyt}| \cdot |e^{(1-x)t}| = e^{(1-x)t}$
 $\rightarrow 0$ då $t \rightarrow \infty$, $x > 1$.

$$|f(t)| \leq C e^{at}, \quad C=1, \quad a=0$$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^\infty = \frac{1}{s}$$

* Egenskaper

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)](s) &= \int_0^\infty (\alpha f(t) + \beta g(t)) e^{-st} dt \\ &= \alpha \mathcal{L}(f(t))(s) + \beta \mathcal{L}(g(t))(s) \quad \text{Linjär!} \end{aligned}$$

Givet $F(s)$ gäller

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R F(\alpha + i\omega) e^{(\alpha + i\omega)t} d\alpha$$

(invers Laplace transform)

För att använda detta krävs ofta djupare kunskaper om integration i det komplexa talplanet.

Entydigheten hos Laplace transformen gör att vi kan konstruera tabeller och bestämma inversen på det nödvärde.

* Skalning

Sats AM3.2 (skalning)

Låt $f(t)$ ha Laplacetransform $F(s)$ och $\alpha > 0$. Då gäller att $g(t) = f(\alpha t)$ har Laplacetransform $G(s) = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$.

Bewis:

$$G(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(\alpha t) dt = \int_0^{\infty} e^{-s \frac{\tau}{\alpha}} f(\tau) d\tau = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{\alpha} \tau} f(\tau) d\tau = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

Ex: $g(t) = e^{3t}$, $f(t) = e^t$, $F(s) = \frac{1}{s-1}$

ger att $G(s) = \frac{1}{3} F\left(\frac{s}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{s}{3}-1} = \frac{1}{s-3}$

* Exponentiell skalning

Sats AM3.3 (Exponentiell skalning)

Låt $f(t)$ ha Laplacetransform $F(s)$.
Då har $g(t) = e^{\alpha t} f(t)$ Laplacetransform $G(s) = F(s-\alpha)$.

Bewis:

$$G(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{\alpha t} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-\alpha)t} f(t) dt = F(s-\alpha)$$

Ex: Låt $g(t) = e^{\alpha t} \cdot 1$. Vi har att $f(t) = 1 \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s}$. Vi får $G(s) = F(s-\alpha) = \frac{1}{s-\alpha}$.

* Laplace transform av derivator

Sats AM 3.4 Laplace transform av derivator

Låt $f(t)$ vara en deriverbar funktion sådan att $|f(t)| \leq ce^{at}$. Låt $f(t)$ ha Laplace transform $F(s)$. Då gäller $\mathcal{L}(f'(t))(s) = sF(s) - f(0)$.

Beweis: Partiell integration ger

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f'(t))(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = \\ &= \left[e^{-st} f(t) \right]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \\ &= -f(0) + sF(s), \quad \operatorname{Re}(s) > a,\end{aligned}$$

eftersom $s = x + iy$, $x > a$ ger

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{-(x+iy)t} f(t)| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} |e^{-xt}| \cdot |e^{iyt}| |f(t)| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(a-x)t} = 0$$

Ex: Högre ordningars derivator

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f''(t))(s) &= s \mathcal{L}(f'(t)) - f'(0) = \\ &= s^2 \mathcal{L}(f(t)) - s f(0) - f'(0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f'''(t))(s) &= s \mathcal{L}(f''(t)) - f''(0) = \\ &= s^3 \mathcal{L}(f(t)) - s^2 f(0) - s f'(0) - f''(0).\end{aligned}$$

Sats AM 3.5 Låt $f(t)$ ha $\mathcal{L}$ -transform $F(s)$,
 $\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(s) = s^n F(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} f^{(i-1)}(0)$.

Ex: Låt $f(t) = e^t \Rightarrow f'(t) = e^t$

Vi har $F(s) = \frac{1}{s-1}$, $\operatorname{Re} s > 1$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f'(t))(s) &= sF(s) - f(0) = \frac{s}{s-1} - 1 \\ &= \frac{s}{s-1} - \frac{s-1}{s-1} = \frac{1}{s-1} = \mathcal{L}(f(t))(s).\end{aligned}$$

* Laplace transform av integral

Sats AM3.6 Laplace transform av integral
 Låt $|f(t)| \leq Ce^{at}$ med Laplace transform $F(s)$.
 Låt $g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$. Då gäller
 $G(s) = \frac{1}{s} F(s)$, $\operatorname{Re}(s) > a$.

Bewis: Partiell integration

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(g(t))(s) &= \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t f(\tau) d\tau dt = \\ &= \left[-\frac{1}{s} e^{-st} g(t) \right]_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} g'(t) dt \\ &= \frac{1}{s} F(s) \quad \text{eftersom } g(0) = 0. \end{aligned}$$

Ex: Låt $f(t) = 1$ $g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau = t$

$$\mathcal{L}(t)(s) = \mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau) d\tau\right)(s) = \frac{1}{s} \cdot F(s) = \frac{1}{s^2}$$

Sats AM3.7

Låt $f(t)$ ha Laplace transform $F(s)$.

Då gäller $g(t) = tf(t) \Rightarrow G(s) = -F'(s)$

Bewis: $F'(s) = \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt =$
 $= - \int_0^\infty t e^{-st} f(t) dt = -G(s)$

Ex: $\mathcal{L}(te^{-t})(s) = -\frac{d}{ds} \frac{1}{s+1} = \frac{1}{(s+1)^2}$

Ex: $\mathcal{L}(t^2 e^{-t})(s) = -\frac{d}{ds} \frac{1}{(s+1)^2} = \frac{2}{(s+1)^3}$

Ex: $\mathcal{L}(t^k e^{-t})(s) = \frac{k!}{(s+1)^{k+1}}$

(visa detta!)