

Idag: * Faltning

* Impulser och
diskontinuerliga funktioner

* Laplace transform för
att lösa ODE och
integraler

AM 3,4 - 3,6

* Faltning

Laplace transformen av en produkt
av två funktioner är inte produkten
av Laplace transformerna. För att
studera Laplace transformen av
produkten introducera vi faltning.

Definition (faltning)

Faltningen mellan två funktioner
 $f(t)$ och $g(t)$ skrivs $(f * g)(t)$ och
ges av $(f * g)(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)du$

Faltningen är kommutativ:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)du = \left\{ \begin{matrix} \bar{t} = t-u \\ \bar{u} = t-u \end{matrix} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
 &= - \int_t^0 f(\bar{t}) g(t-\bar{t}) d\bar{t} = \int_0^t f(u) g(t-u) du \\
 &= (g * f)(t).
 \end{aligned}$$

Sats AM 3.8

Låt $|f(t)|, |g(t)| \leq Ce^{at}$ ha

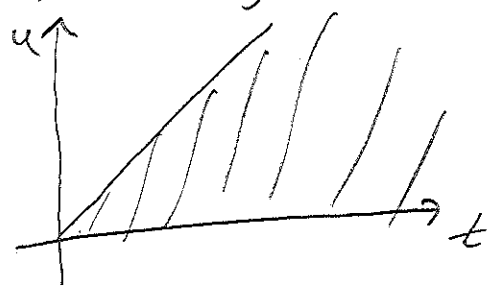
Laplace transformerna $F(s)$ och $G(s)$

Då gäller för $h(t) = (f * g)(t)$ att

$$H(s) = F(s) \cdot G(s).$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \int_0^\infty e^{-st} h(t) dt = \\
 &= \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t f(u) g(t-u) du dt =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(u) g(t-u) du dt = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Byt integrationsordning} \\ \text{u} \end{array} \right\} =
 \end{aligned}$$


$$\begin{aligned}
 &= \int_0^\infty \int_u^\infty e^{-st} f(u) g(t-u) dt du = \\
 &= \left\{ \bar{t} = t - u \right\} = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s\bar{t}} e^{-su} f(u) g(\bar{t}) d\bar{t} du = \\
 &= \int_0^\infty e^{-s\bar{t}} g(\bar{t}) d\bar{t} \cdot \int_0^\infty e^{-su} f(u) du = \\
 &= G(s) \cdot F(s)
 \end{aligned}$$

Ex: Bestäm $h(t)$ givet $H(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+1}$

Låt $F(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow f(t) = 1$, $G(s) = \frac{1}{s+1} \Rightarrow$

$g(t) = e^{-t}$. Sats AM3.8 ger

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)du =$$

$$= \int_0^t e^{-u} du = \left[-e^{-u} \right]_0^t = 1 - e^{-t}.$$

* Impulser och diskontinuerliga funktioner

Definition: Heavisides stegfunktion

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

Eftersom $\theta(t) = 1, t > 0$ gäller att

$\mathcal{L}(\theta(t))(s) = \frac{1}{s}$ eftersom punktvärden i 0 inte påverkar integralen.

Sats AM3.9 Fördrivning

Låt $f(t)$ ha Laplacetransform $F(s)$ och $\theta(t)$ vara Heavisides stegfunktion

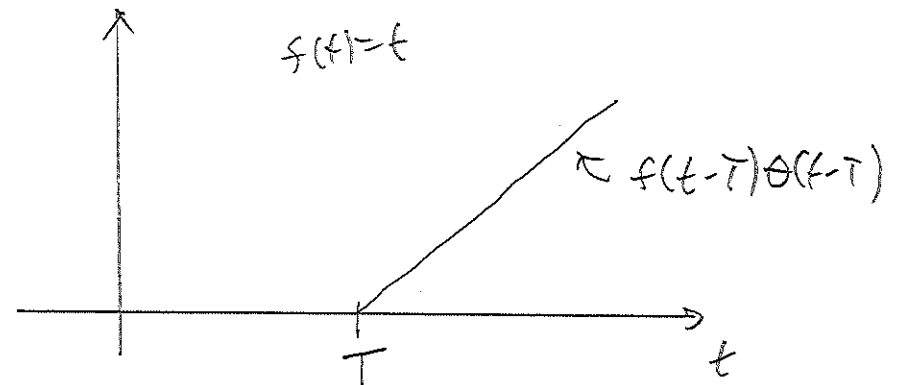
Då gäller $\mathcal{L}(f(t-T)\theta(t-T))(s) = e^{-sT}F(s)$.

Beris:

Vi har $\mathcal{L}(f(t-T)\theta(t-T))(s) =$

$$= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t-T)\theta(t-T) dt = \int_T^{\infty} e^{-st} f(t-T) dt =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \tau = t-T \\ d\tau = dt \end{matrix} \right\} = \int_0^{\infty} e^{-s(\tau+T)} f(\tau) d\tau = e^{-sT} F(s)$$



Ex: En spänning E slås på vid tiden $t=1$, och att $\delta_\epsilon(t) = 0$, $t \neq 0$ då $\epsilon \rightarrow 0$.
bestäm spänningens Laplace transform.

$$\mathcal{L}(E\theta(t-1))(s) = E e^{-s} \cdot \frac{1}{s} \text{ eftersom}$$

$\theta(t)$ har Laplace transform $\frac{1}{s}$.

* Impuls

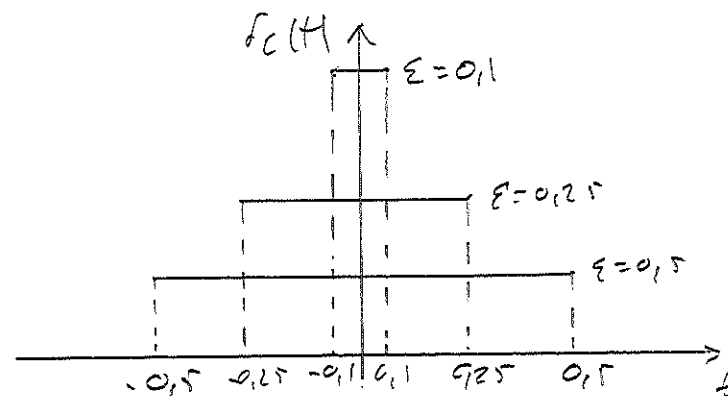
En kraft som verkar med stor styrka under kort tid kallas impuls.

Låt $\delta_\epsilon(t)$ definieras av

$$\delta_\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & t \leq -\epsilon \\ \frac{1}{2\epsilon} & -\epsilon < t < \epsilon \\ 0 & t \geq \epsilon \end{cases}$$

För något $\epsilon > 0$.

$$\text{Vi ser att } \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(t) dt = 1 \quad \forall \epsilon > 0$$



Definition: (Diracs delta)

Diracs delta är en idealiserad enhetspuls i $t=0$ sådan att $\delta(t) = 0$ $t \neq 0$ och

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

En enhetspuls i $t=t_0$ ges av $\delta(t-t_0)$.
Följande egenskaper gäller för δ .

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \delta(t-t_0) f(t) dt &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \delta_\epsilon(t-t_0) f(t) dt = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_{-t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} f(t) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(t_0 + \epsilon) = f(t_0) \end{aligned}$$

Sats AM 3.10

Vi har att $\mathcal{L}(\delta(t-t_0))(s) = e^{-st_0}$, $t_0 \geq 0$ Speciellt $\mathcal{L}(\delta(t))(s) = 1$.Beweis: Antag först $t_0 > 0$, $\varepsilon < t_0$. Vi

$$\text{har } \mathcal{L}(\delta(t-t_0))(s) = \int_0^{\infty} \delta(t-t_0) e^{-st} dt =$$

$$= e^{-st_0}. \text{ Vi låter nu } t_0 \rightarrow 0$$

$$\text{vilket ger } \mathcal{L}(\delta(t))(s) = \lim_{t_0 \rightarrow 0} e^{-st_0} = 1.$$

* Lösning av ODE med Laplacetransform

Vi har fyra steg:

- 1) Laplacetransformens ekvationen
- 2) Sätt in begynnelsevärden
- 3) Lös den algebraiska ekvationen
- 4) Laplacetransformens invers

Sats AM 3.11

Tabell för att beräkna invers
L-transform

$$\mathcal{L}(\delta(t))(s) = 1$$

$$\mathcal{L}(\theta(t))(s) = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}(t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}(e^{-at})(s) = \frac{1}{s+a}$$

$$\mathcal{L}(t^n e^{-at})(s) = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}} \text{ (exponentiell skalning)}$$

$$\mathcal{L}(\cos at)(s) = \frac{s}{s^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}(\sin at)(s) = \frac{a}{s^2+a^2}$$

Beweis: Alla uttryck de här stegen är redan gjorda. Vi gör $\cos at$

$$\mathcal{L}(\cos at)(s) = \mathcal{L}\left(\frac{e^{iat} + e^{-iat}}{2}\right)(s) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-ia} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+ia} = \frac{1}{2} \frac{s+ia + s-ia}{(s-ia)(s+ia)}$$

$$= \frac{s}{s^2+a^2}$$

□

Ex: $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = e^{-t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Laplace transform ger

$$s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) + 2s Y(s) - 2y(0) + Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$\stackrel{=0}{=} \frac{1}{s+1}$$

$$\Rightarrow (s^2 + 2s + 1) Y(s) = \frac{1}{s+1} + 1 \quad \text{eller}$$

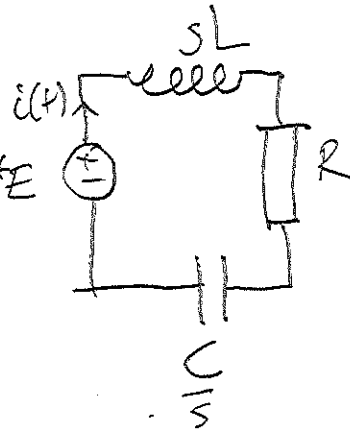
$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^3} + \frac{1}{(s+1)^2} \quad \text{vilket ger}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} t^2 e^{-t} + t e^{-t} \quad \text{enligt tabell.}$$

Ex: Elektrisk krets

$$L i'(t) + R i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(u) du = E(t) = e^{-2t} E$$

(där $L=1$, $R=4$, $C=\frac{1}{3}$, $i(0)=0$)



$$s I(s) + 4 I(s) + 3 \frac{1}{s} I(s) = \frac{1}{s+2}$$

Ellersom $s^2 + 4s + 3 = (s+1)(s+3)$ för vi

$$I(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

Liknämning ger $s = A(s+2)(s+3) + B(s+1)(s+3) + C(s+1)(s+2)$

$$\begin{aligned} s^2: & 0 = A + B + C \\ 1: & 1 = 5A + 4B + 3C \\ 0: & 0 = 6A + 3B + 2C \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} 1 &= 2A + B \\ 0 &= 4A + B \end{aligned} \right\} \begin{aligned} A &= -\frac{1}{2} \\ B &= 2 \\ C &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$I(s) = -\frac{1}{2} \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+2} - \frac{3}{2} \frac{1}{s+3} \quad \text{vilket ger}$$

$$i(t) = -\frac{1}{2} e^{-t} + 2 e^{-2t} - \frac{3}{2} e^{-3t}$$

Sammanfattning:

Sats AM 3,1 och 3,4

↑ värdet ↑ derivata

* Det är L-transform

* Skalning

* Fältning

* Lös ODE med L-transform