

Idag: * Sammanfattning av kursen

Kap 5, 6, 7, 18, AM 1, 2, 3

* Riemann summor och Integralen

Låt f vara kontinuerlig på $[a, b]$,

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Undre Riemann summan: $L(f, n) = \sum_{i=1}^n f(l_i) \Delta x_i$

Övre Riemann summan: $U(f, n) = \sum_{i=1}^n f(u_i) \Delta x_i$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad (l_i, u_i \in [x_{i-1}, x_i]) \text{ sådant att}$$

$$\min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = f(l_i), \quad \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = f(u_i)$$

Om det finns ett I s.a.

$$L(f, n) \leq I \leq U(f, n) \quad \forall n \text{ gäller}$$

$$I = \int_a^b f(x) dx, \text{ kont} \Rightarrow \text{integrerbar.}$$

Sats 5.4 Medelvärdessatsen för integraler

Låt f vara kontinuerlig på $[a, b]$.

Då finns $c \in [a, b]$ sådan att

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(c)$$

Sats 5.5 Analysens fundamentalsats

Låt f vara kontinuerlig på ett intervall J innehållande $a \in J$. Låt $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, då är F deriverbar på J och $F'(x) = f(x)$, F är primitivfunktion till f .

* Integrations tekniker

Sats 5.6 Variabelsubstitution

Låt g vara deriverbar på $[a, b]$ med $g(a) = A$, $g(b) = B$ och f kontinuerlig på $[A, B]$. Då är $\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_A^B f(u) du$.

Partiell integration:

$$\int_a^b U(x) \frac{dV}{dx} dx = [U(x)V(x)]_a^b - \int_a^b V(x) \frac{dU(x)}{dx} dx$$

Generaliserad integral:

$$I = \int_a^b f(x) dx, \quad (i) \ a = -\infty, \ b = \infty$$

(ii) f obegränsad

Om $I = \pm\infty$ divergent annars konvergent

Sats 6.2 p -integraler

$$(i) \int_a^\infty x^{-p} dx = \begin{cases} \text{konvergent} & \frac{a^{1-p}}{p-1}, \ p > 1 \\ \text{divergent} & , \ p \leq 1 \end{cases}$$

$$(ii) \int_0^a x^{-p} dx = \begin{cases} \text{konvergent} & \frac{a^{1-p}}{1-p}, \ p < 1 \\ \text{divergent} & , \ p \geq 1 \end{cases}$$

* Numerisk integration

Trapezmetoden



Mittpunktsmetoden



Simpsons formel



Sats 6.4 Mittpunktmets fel

$$\left| \int_a^b f(x) dx - M_n \right| \leq \frac{K(b-a)^3}{24n^2} \quad \text{där}$$

$$|f''| \leq K \text{ på } [a, b].$$

* Rotationsvolym

x-axel: $f(x)$ rotera $V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$

y-axel: $f(x)$ rotera $V = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot x dx$

* Båglängd

Längden av grafen $\{(x, f(x)), a \leq x \leq b\}$

ges av $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$

* Masscentrum

Låt $\sigma(x)$ vara densitet för området

som begränsas av $y = f(x)$, $x=a$, $x=b$ och x -axeln.

massan: $m = \int_a^b \sigma(x) f(x) dx$

moment: $M_{x=0} = \int_a^b x \sigma(x) f(x) dx$

$$M_{y=0} = \frac{1}{2} \int_a^b \sigma(x) f(x)^2 dx$$

masscentrum $\bar{x} = \frac{M_{x=0}}{m}$, $\bar{y} = \frac{M_{y=0}}{m}$

* Centroiden är masscentrum med $\sigma(x) = 1$.

Sats 7.2a Pappus sats

Et område R med area A roteras runt en linje L . Låt $\bar{r}$ vara kortaste avståndet mellan R 's centroid och L . Då ges volymen av $V = 2\pi \bar{r} \cdot A$.

* Ordinära differentialekvationer

En ODE innehåller en eller flera derivator med avseende på x av en okänd funktion $y(x)$ som är lösningen till ekvationen.

* Separabel ODE

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

* Integrerande faktor

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \Rightarrow y(x) = e^{-P(x)} \int e^{P(x)} q(x) dx$$

där $P(x)$ är primitiv till $p(x)$.

* Entydighet och existens (Picard)

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), y(x_0) = y_0 \text{ har entydig lösning}$$

i en omgivning till x_0 om f är kontinuerlig och Lipschitz kontinuerlig med avseende på y i ett område $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$.

* Andra ordningens ODE

$$F(y'', y', y, x) = 0$$

Om $F(y'', y', x) = 0$ Låt $v = \frac{dy}{dx}$ lös

$$F(v', v, x) = 0 \quad (1:a \text{ ordningen})$$

Om $F(y'', y', y) = 0$ Låt $v = \frac{dy}{dx}$ lös

$$F(v \frac{dv}{dy}, v, y) = 0 \quad (1:a \text{ ordningen})$$

$$\frac{dy}{dx} = v(y) \text{ Löses där efter.}$$

* Linjära: Konstanta koefficienter

$$ay'' + by' + cy = 0 \Rightarrow y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

där r_1 och r_2 är rötter till $ax^2+bx+c=0$
 Om $r_1=r_2$ $y=C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x}$.

* Eulers ekvation

$$ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + b x \frac{dy}{dx} + c y = 0, \text{ ansätt } y=x^r$$

* Vektorer och matriser

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cos \theta,$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^n v_i w_i$$

Matris notation, Lösa ekvationssystem
 med upp till 3 obekanta
 med substitution.

* System av ODE

$\vec{y}'(x) = \vec{f}(x, \vec{y}), \vec{y}(0) = \vec{y}_0$ har
 en unik lösning om $\vec{f}$ är L-kont i $\vec{y}$.

Sats AM7.1 Högre ordningens ODE

$$y^{(n)} = F(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y^{(1)}, y, x)$$

kan skrivas som system av n l:e
 ordningens ODE genom $y_i = y^{(i-1)}$.

* Definiera $e^x, \sin x, \cos x$ som
 lösningar till differentialekvationer.
 Härled standarddefinitionerna från de
 nya.

* Numeriska metoder.

Eulers metod $\vec{y}_i = \vec{y}_{i-1} + k_i \vec{f}(t_i, \vec{y}_{i-1})$

Backt Euler $\vec{y}_i = \vec{y}_{i-1} + k_i \vec{f}(t_i, \vec{y}_i)$

Mittpunkt $\vec{y}_i = \vec{y}_{i-1} + k_i \vec{f}(\frac{t_{i-1}+t_i}{2}, \frac{\vec{y}_{i-1}+\vec{y}_i}{2})$

där k_i är steglängd

Sats AM2.1 Fel i Eulers metod

$$|y(t_n) - y_n| \leq \frac{kM}{2L} (e^{L(t_n - t_0)} - 1)$$

Bekit Euler fel $\sim k$
 Mittpunkt fel $\sim k^2$.

* Stabilitetsområde via testekvation

$$y' = \lambda y$$

* Numeriska metodens egenskaper.

* Randvärdesproblem och inskjutning

* Laplace transform

Sats AM3.1 Väldetknierad

Om $|f| \leq Ce^{at}$ är $F(s)$ väldetknierad
 för alla $s \in \mathbb{C}$ s.a. $\operatorname{Re}(s) > a$.

Sats AM3.4 Derivator.

Låt $f(t)$ ha Laplace transform $F(s)$
 då gäller $\mathcal{L}(f'(t))(s) = sF(s) - f(0)$.

* Skalning, felfning, fordröjning, integral

* Laplace transform av $\theta(t)$ och $\delta(t)$

* Lösning av ODE och integral-
 ekvationer med Laplace transform

1) Laplace transformera

2) Sätt in begynnelsevärden

3) Lös algebraisk ekvation

4) Laplace transformera tillbaka
 m.h.j.p. tabell.