RÖ 7. ORDINÄRA DIFFERENTIALEKVATIONER

En ekvation på formen

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x) \quad (*)$$

kallas för en ORDINÄR DIFFERENTIALEKVATION AV ORDNING n.

n för att den högsta derivatan är n:te derivatan av $y = y(x)$, och ordinär för att vi bara deriverar m.a.p. en variabel, i detta fallet x.

Vi vill hitta funktionen $y = y(x)$ som löser ekvationen $(*)$.

Ekvationen $(*)$ är LINJÄR om $a_0, \dots, a_n$ inte beror av y, (men de kan bero av x) och HOMOGEN om $f(x) = 0$.

Exempel: $y'''(x) + 3y'(x) = \sin(x)$ är en linjär ode av ordning 3.

$y''(x) + y^2(x) = 0$ är en olinjär ode $(a_0 = y(x))$ av ordning 2.

18.1.4. Är differentialekvationen $(*)$ $y''' + xy' = x\sin x$ linjär eller olinjär, homogen eller inhomogen? Vilken ordning har $(*)$?

Linjär?: Är alla koefficienter framför derivator av y oberoende av y? Ja!

$a_1 = x$, $a_3 = 1$ Alltså $(*)$ linjär

Homogen?: Finns någon term som ej innehåller y? Ja, $f(x) = x\sin x$!

Alltså är $(*)$ inhomogen.

Ordning?: Högsta derivatan är $y'''(x) = y^{(3)}(x) \Rightarrow$ ordning 3

18.1.8. Är differentialekvationen (*) $\cos x \frac{dx}{dt} + x \sin t = 0$

homogen / inhomogen, linjär / olinjär? Vilken ordning har (*)

Linjär? Är alla koefficienter framför derivator av $x(t)$ oberoende av x?

Observera att funktionen vi söker nu är $x = x(t)$!

$$\cos x \cdot x' + \sin t \, x = 0$$

$a_1 = \cos x$, $a_0 = \sin t$

a_1 beror av $x \Rightarrow$ (*) är olinjär.

Homogen? Ej linjär $\Rightarrow$ kollar ej på det.

Ordning: Högsta derivatan är $x'(t) = x^{(1)}(t) \Rightarrow$ ordning 1

2:a ordningens differentialekvationer

Ekvationen

(*) $ay'' + by' + cy = 0$, a, b, c konstanter,

är en linjär, homogen ode av ordning 2.

Dess karaktäristiska ekvation är

$$ar^2 + br + c = 0,$$

med rötter r_1 och r_2

Det finns tre fall

Fall 1: $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$,

$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$, för vilka konstanter C_1 och C_2 som helst.

Fall 2: $r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$.

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)\,e^{r_1 x}$$, för vilka C_1 och C_2 som helst.

Fall 3: $r_{1,2} = k \pm \omega i \in \mathbb{Z}$.

$$y(x) = C_1 e^{kx}\cos(\omega x) + C_2 e^{kx}\sin(\omega x)$$

3.7.2. Lös $y'' - 2y' - 3y = 0$.

karaktäristisk ekvation:

$$r^2 - 2r - 3 = 0$$

kvadratkomplettera

$$(r-1)^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 1 \pm 2 \Rightarrow r_1 = 3,\ r_2 = -1$$

Fall 1! $y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$

3.7.6. Lös $y'' - 2y' + y = 0$

Kar. ekv. $r^2 - 2r + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (r-1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = r_2 = 1$

Fall 2! $y(x) = (C_1 + C_2 x)\,e^{x}$

3.7.10. Lös $y'' - 4y' + 5y = 0$

Kar. ekv. $r^2 - 4r + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (r-2)^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 2 \pm \sqrt{-1}$

$\Rightarrow r_1 = 2 + i,\ r_2 = 2 - i \qquad (k = 2,\ \omega = 1)$

Fall 3! $y(x) = C_1 e^{2x}\cos x + C_2 e^{2x}\sin x = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

3.7.28. Lös $\begin{cases} y'' + \omega^2 y = 0 \\ y(a) = A \\ y'(a) = B \end{cases}$

Kar. ekv. $r^2 + \omega^2 = 0 \iff r^2 = -\omega^2 \Rightarrow r = \pm\sqrt{-\omega^2} = \pm i\omega$

Fall 3! $k = 0$, $\omega = \omega$.

$$y(x) = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x.$$

$$y'(x) = -C_1 \omega \sin \omega x + C_2 \omega \cos \omega x$$

Vi vill hitta konstanterna C_1 och C_2 genom att använda begynnelsevärdena $y(a) = A$, $y'(a) = B$.

$$y(a) = C_1 \cos wa + C_2 \sin \omega a = A \Rightarrow C_1 = \frac{A - C_2 \sin \omega a}{\cos \omega a} \quad (1)$$

$$y'(a) = -C_1 \omega \sin \omega a + C_2 \omega \cos \omega a = B \Rightarrow C_2 = \frac{B + C_1 \omega \sin \omega a}{\omega \cdot \cos \omega a} \quad (2)$$

Sätt in (1) i (2):

$$C_2 = \frac{B}{\omega \cos \omega a} + \frac{\sin \omega a}{\cos \omega a} \left(\frac{A - C_2 \sin \omega a}{\cos \omega a} \right) = \{\text{gemensam nämnare}\}$$

$$= \frac{B \cos \omega a + A\omega \sin \omega a - C_2 \omega \sin^2 \omega a}{\omega \cos^2 \omega a}$$

$$\iff C_2 \left(1 + \frac{\sin^2 \omega a}{\cos^2 \omega a} \right) = \frac{B \cos \omega a + A\omega \sin \omega a}{\omega \cos^2 \omega a}$$

$$\iff C_2 \left(\frac{\overbrace{\cos^2 \omega a + \sin^2 \omega a}^{=1!}}{\cos^2 \omega a} \right) = \frac{B \cos \omega a + A\omega \sin \omega a}{\omega \cos^2 \omega a}$$

$$\Leftrightarrow \quad C_2 = \frac{B}{\omega}\cos\omega a + A\sin\omega a \qquad (3)$$

sätt in (3) i (1)

$$C_1 = \frac{A - \sin\omega a\left(\frac{B}{\omega}\cos\omega a + A\sin\omega a\right)}{\cos\omega a} = \frac{A}{\cos\omega a} - \frac{B}{\omega}\sin\omega a - \frac{A\sin^2\omega a}{\cos\omega a}$$

Vi får

$$y(x) = C_1\cos\omega x + C_2\sin\omega x = \frac{A\cos\omega x}{\cos\omega a} - \frac{B}{\omega}\sin\omega a\cos\omega x$$

$$- \frac{A\sin^2\omega a\cos\omega x}{\cos\omega a} + \frac{B}{\omega}\cos\omega a\sin\omega x + A\sin\omega a\sin\omega x$$

$$= \frac{A\cos\omega x}{\cos\omega a}\underbrace{\left(1-\sin^2\omega a\right)}_{=\cos^2\omega a} + \frac{B}{\omega}\left(\sin\omega x\cos\omega a - \cos\omega x\sin\omega a\right)$$

$$+ A\sin\omega a\sin\omega x$$

$$= \{\sin a\cos b - \cos a\sin b = \sin(a-b)\}$$

$$= A\cos\omega x\cos\omega a + A\sin\omega a\sin\omega x + \frac{B}{\omega}\sin(\omega(x-a))$$

$$= \{\cos a\cos b + \sin a\sin b = \cos(a-b)\}$$

$$= A\cos(\omega(x-a)) + \frac{B}{\omega}\sin(\omega(x-a))$$

$\boxed{\text{Om } a=0}$ $\begin{cases} y'' + \omega^2 y = 0 \\ y(0) = A \\ y'(0) = B \end{cases}$

$y(0) = C_1 = A$; $y'(0) = C_2\omega = B \Rightarrow C_2 = \frac{B}{\omega} \Rightarrow y(x) = A\cos\omega x + \frac{B}{\omega}\sin\omega x$