Ö 8 LINJÄRA DIFFERENTIALEKVATIONER

Förra veckan klassificerade vi ode:er på formen

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x) \qquad (1)$$

och löste andra ordningens linjära, homogena ode:er med konstanta koefficienter, dvs ekvationer på formen

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad , \; a, b, c \text{ konstanter.}$$

Lösningen fick man genom att lösa den <u>karaktäristiska ekvationen</u>

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Idag ska vi lösa (1) då $f(x) = 0$, dvs homogena ode:er av högre ordning. Den har karaktäristisk ekvation

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0 \qquad (2)$$

med rötter $r_1, \dots, r_n$

Det finns två fall

<u>Fall 1:</u> r_1 är en multipelrot av ordning m till (2)

$$y_1 = e^{r_1 x}, \; y_2 = x e^{r_1 x}, \; \dots, \; y_K = x^{m-1} e^{r_1 x} \text{ löser (1)}$$

<u>Fall 2:</u> $r_{1,2} = k \pm i\omega$ är multipelrötter av ordning m till (2)

$$y_1 = e^{kx} \cos \omega x, \; \dots, \; \dots, \; y_{2m-1} = x^{m-1} e^{kx} \cos \omega x$$
$$y_2 = e^{kx} \sin \omega x, \; \dots, \; y_{2m} = x^{m-1} e^{kx} \sin \omega x$$
löser (1)

och $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$, dvs ett $y_i(x)$ för
varje rot. och konstanter $C_1, \dots, C_n$.

.2. Lös $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$

ar. ekv. $r^4 - 2r^2 + 1 = 0$

ät $r^2 = t$, då får vi $t^2 - 2t + 1 = 0 \iff (t-1)^2 = 0$

$\Rightarrow t_{1,2} = 1$

Nu är $r = \pm\sqrt{t}$ så $r_{1,2} = 1$, $r_{3,4} = -1$.

Fall 1 med $m = 2$!

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 x e^{x} + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x}$$
$$= (C_1 + C_2 x)e^{x} + (C_3 + C_4 x)e^{-x}$$

Inhomogena differentialekvationer av ordning 2

Vi vill lösa ekvationer på formen

$$ay'' + by' + cy = f(x), \text{ där } f(x) \not\equiv 0 \qquad (*)$$

och a, b, c konstanter.

Denna ekvation har lösning

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x), \text{ där}$$

$y_h(x)$ löser samma ekvation med $f(x) = 0$ och

$y_p(x)$ är en partikulärlösning till $(*)$.

Man kan ansätta en lösning $y_p(x)$ beroende på hur $f(x)$ ser ut.

$f(x)$	$y_p(x)$
Polynom av grad n, $P_n(x)$, ex) $f(x) = x^2 + x$	$x^p A_n(x)$, $A_n(x)$ polynom av grad n. ex) $x^p(a_2x^2 + a_1x + a_0)$
Polynom ggr exponentialfunktion $f(x) = P_n(x)e^{rx}$ ex) $f(x) = xe^{2x}$	$x^p e^{rx} A_n(x)$, $A_n(x)$ polynom av grad n. ex) $x^p e^{2x}(a_1x + a_0)$
Polynom ggr exponentialfkn ggr sin/cos. $f(x) = P_n(x)e^{rx}\sin cx$ ex) $f(x) = xe^x \sin x$	$x^p e^{rx}(A_n(x)\sin cx + B_n(x)\cos cx)$, $A_n(x), B_n(x)$ polynom av grad n. ex) $x^p e^x[(a_1x + a_0)\sin x + (b_1x + b_0)\cos cx]$

Där p är det minsta talet av 0,1,2 som gör att ingen del av partikulärlösningen löser den homogena ekvationen

18.6.6. Lös $y'' + 4y = x^2$

Vi söker en lösning på formen $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

$y_h(x)$: Lös $y'' + 4y = 0$

Kar. ekv. $r^2 + 4 = 0 \iff r^2 = -4 \Rightarrow r_{1,2} = \pm 2i$

$\Rightarrow y_h(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

$y_p(x)$: Vi ansätter $y_p(x) = ax^2 + bx + c$ eftersom $f(x) = x^2$ är ett polynom av grad 2 och homogenlösningen inte innehåller något polynom (om den gjorde det kunde vi ha behövt x^p)

$y_p'(x) = 2ax + b$

$y_p''(x) = 2a$

Sätt in i ekvationen $\Rightarrow$ $y_p'' + 4y_p = x^2 \iff$

$2a + 4(ax^2 + bx + c) = x^2 \iff$

$4ax^2 + 4bx + 2a + 4c = x^2$

vi får $4a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$

$4b = 0 \Rightarrow b = 0$

$2a + 4c = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{1}{2}a = -\frac{1}{8}$

Alltså är $y_p(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}$ och

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}$$

18.6.8 Lös $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$

Vi söker $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

$\underline{y_h(x)}$:

kar. ekv. $r^2 + 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow (r+2)^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = -2$

$\Rightarrow y_h(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-2x} = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$

$\underline{y_p(x)}$: $f(x) = e^{-2x}$ så vi vill ansätta $C_3 e^{-2x}$, men vi ser att det löser den homogena ekvationen eftersom

$y_h(x) = \underbrace{C_1 e^{-2x}} + C_2 x e^{-2x}$

så vi måste ansätta $y_p(x) = C_3 x^2 e^{-2x}$ (eftersom även xe^{-2x} löser den homogena ekvationen, räcker inte det)

vi får $y_p' = C_3 2x e^{-2x} + C_3 x^2 (-2) e^{-2x} = e^{-2x}(2C_3 x - 2C_3 x^2)$

$y_p'' = -2e^{-2x}(2C_3 x - 2C_3 x^2) + e^{-2x}(2C_3 - 4C_3 x) =$

$= e^{-2x}(2C_3 - 8C_3x + 4C_3x^2)$

Sätt in i ursprungliga ekvationen

$$y_p'' + 4y_p' + 4y_p = e^{-2x} \iff$$

$$e^{-2x}(2C_3 - 8C_3x + 4C_3x^2) + 4e^{-2x}(2C_3x - 2C_3x^2) + 4C_3x^2e^{-2x} = e^{-2x}$$

$$\iff$$

$$\cancel{e^{-2x}}(2C_3 - \cancel{8C_3x} + \cancel{8C_3x} + \cancel{4C_3x^2} - \cancel{8C_3x^2} + \cancel{4C_3x^2}) = \cancel{e^{-2x}}$$

$\Rightarrow C_3 = \frac{1}{2} \Rightarrow y_p(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-2x}$ och

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + \frac{1}{2}x^2e^{-2x}$$