RÖ 12. LAPLACETRANSFORM

Laplacetransformen av en funktion $f(t)$, $t \geq 0$, ges av

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt \quad , \quad s \in \mathbb{C} \quad , \quad Re(s) \geq 0.$$

Är ett annat sätt att beskriva funktionen $f(t)$ som är användbart bl.a. i

- reglerteknik - styra system, t.ex termostat, tank, motor
- ellära - kretsar..
- lösning av diffekvationer

För att integralen ska konvergera (inte bli $\pm\infty$) behöver $f(t)$ uppfylla

$$|f(t)| \leq ce^{at} \quad , \quad \text{för några konstanter } c \text{ och } a.$$

X.15. d) Hitta a och c så att $|f(t)| \leq ce^{at}$ $\forall\, t \geq 0$, då $f(t) = t^3$

Vi behöver en övre begränsning av t i termer av e^{at}.
Vi vet att

$$t \leq e^t \iff e^t - t \geq 0$$

varför?

$$\frac{d}{dt}(e^t - t) = e^t - 1 \geq 0 \quad \text{för } t \geq 0$$

eftersom e^t är växande och $e^0 = 1$.
Alltså är

$$e^t - t \text{ växande och } e^0 - 0 = 1 \geq 0 \quad , \text{ så}$$

$$e^t - t \geq 0 \iff t \leq e^t.$$

Vi får $|f(t)| = |t^3| = \{t \geq 0\} = t^3 \leq (e^t)^3 = e^{3t}$

$\Rightarrow$ $c = 1$, $a = 3$

X.16. Beräkna Laplacetransformen av $f(t) = \cos bt$.

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st} \cos bt\,dt = \{P.I.\} = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \cos bt\right]_0^\infty$$

$$- \int_0^\infty -\frac{1}{s} e^{-st} \cdot -b \sin bt\,dt = \left\{ \begin{array}{l} Re(s) > 0 \Rightarrow e^{-st} \to 0 \text{ då } t \to \infty \text{ och } |\cos bt| \leq 1 \\ \Rightarrow e^{-st} \cdot \cos bt \to 0,\ t \to \infty \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{b}{s} \int_0^\infty e^{-st} \sin bt\,dt = \frac{1}{s} - \frac{b}{s} \left(\left[-\frac{1}{s} e^{-st} \sin bt\right]_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{1}{s} e^{-st} b \cos bt\,dt \right)$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{b}{s} \left(0 + \frac{b}{s} \int_0^\infty e^{-st} \cos bt\,dt \right) = \frac{1}{s} - \frac{b^2}{s^2} \int_0^\infty e^{-st} \cos bt\,dt$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{b^2}{s^2}\right) \int_0^\infty e^{-st} \cos bt\,dt = \frac{1}{s}$$

$$\Leftrightarrow \quad F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cos bt\,dt = \frac{1}{s} \Big/ \left(\frac{s^2 + b^2}{s^2}\right) = \frac{s}{s^2 + b^2}$$

X.19. Beräkna Laplacetransformen av $f(t) = t^n$. Gäller $|f(t)| \leq Ce^{at}$ för några $a, C \geq 0$.

På samma sätt som i uppg. 15 får vi $|f(t)| \leq e^{n \cdot t} \Rightarrow C = 1, a = n$

$$\mathcal{L}(t^n)(s) = \int_0^\infty e^{-st} t^n\,dt = \{P.I.\} = \cancel{\left[-\frac{1}{s} e^{-st} t^n\right]_0^\infty} + \frac{n}{s} \int_0^\infty e^{-st} \cdot t^{n-1}\,dt =$$

$$= \left\{ e^{-st} \to 0,\ t \to \infty \text{ snabbare än varje polynom} \Rightarrow e^{-st} \cdot t^n \to 0,\ t \to \infty \right\}$$

$$= \frac{n}{s} \mathcal{L}(t^{n-1})(s) = \frac{n}{s} \cdot \frac{(n-1)}{s} \mathcal{L}(t^{n-2})(s) = \ldots = \frac{n(n-1) \cdots 2 \cdot 1}{s^n} \mathcal{L}(t^0)(s)$$

$$= \frac{n!}{s^n}\int_0^\infty e^{-st}\cdot t^0\,dt = \frac{n!}{s^n}\int_0^\infty e^{-st}\,dt = \frac{n!}{s^n}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty = \frac{n!}{s^n}\left(0-\left(-\frac{1}{s}\right)\right) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

X.20. Visa att $\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$

$$\text{V.L.} = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau = \left\{ \text{låt } t-\tau = s \Rightarrow d\tau = -ds,\ \tau = 0 \Rightarrow s = t,\ \tau = t \Rightarrow s = 0 \right\}$$

$$= \int_t^0 f(t-s)g(s)\,(-ds) = -\int_t^0 f(t-s)g(s)\,ds = \int_0^t f(t-s)g(s)\,ds$$

$$= \{s = \tau\} = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = \text{h.l.} \quad \text{VSV.}$$

X.21. Lös $\begin{cases} y'' + 2y' + y = g(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ med hjälp av Laplacetransform, givet att

(0) $\boxed{\begin{aligned} &\mathcal{L}(\alpha f(t) + \beta h(t))(s) = \\ &\alpha\mathcal{L}(f)(s) + \beta\mathcal{L}(h)(s) = \\ &\alpha F(s) + \beta H(s) \end{aligned}}$ och

	$f(t)$	$F(s)$
(1)	te^{-t}	$(1+s)^{-2}$
(2)	$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
(3)	$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
(4)	$\int_0^t f(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$	$F(s)\,H(s)$
(5)	$f(t) + g(t)$	$F(s) + H(s)$

Laplacetransformera båda sidor

$$\mathcal{L}(y'' + 2y' + y)(s) = \mathcal{L}(g(t))(s) \overset{(0)}{\Leftrightarrow}$$

$$\mathcal{L}(y'')(s) + 2\mathcal{L}(y')(s) + \mathcal{L}(y)(s) = \mathcal{L}(g)(s) \Leftrightarrow$$

$$\overset{(3)}{s^2 Y(s) - s\cancel{y(0)} - y'(0)} + 2\overset{(2)}{[sY(s) - \cancel{y(0)}]} + Y(s) = G(s) \Leftrightarrow$$

$$Y(s)[s^2 + 2s + 1] - 1 = G(s) \Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2}G(s) + \frac{1}{(s+1)^2} =$$

$$= F(s)G(s) + F(s) \quad , \quad F(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$\Rightarrow y(t) = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau + f(t) = \int_0^t \tau e^{-\tau} g(t-\tau)\, d\tau + t e^{-t}$$

4 5 1