DUGGA

TMV151
Matematisk analys i en variabel M1, 2018–11–27
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje rätt svar ger 1 bonuspoäng på tentan. ANGE ENDAST SVAR PÅ UPPGIFTERNA.

Namn:...**Antagningsår**..........................

Personnummer:..**Email**..

1. Givet $f(x) = 2 - 3x$ och en partition av intervallet $[0, 1]$ i n lika långa delintervall, bestäm den övre Riemannsumman (uttryckt i termer av n).
Lösn. Låt $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, \ldots, n$. Eftersom funktionen är avtagande fås maximum i varje delintervall $[x_{i-1}, x_i]$ i den vänstra punkten x_{i-1}. Den övre Riemannsumman ges därför av $I_{\max}(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n}(2 - 3\frac{i-1}{n})\frac{1}{n} = 2 - \frac{3}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1} i = 2 - 3\frac{n-1}{2n} = \mathbf{\frac{1}{2}} + \mathbf{\frac{3}{2n}}$.

2. Bestäm integralen $\int_0^1 x\sin(x^2)\,dx$.
Lösn. Vi gör substitutionen $u = x^2$, $du = 2x\,dx$, $u(0) = 0$ och $u(1) = 1$,

$$\int_0^1 x\sin(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \sin(u)\,du = \mathbf{\frac{1}{2}(1 - \cos(1))}.$$

3. Bestäm integralen $\int_0^1 x^2 e^x\,dx$.
Lösn. Partiell integration två gånger ger $\int_0^1 x^2 e^x\,dx = [x^2 e^x]_0^1 - 2\int_0^1 xe^x\,dx = e - 2[xe^x]_0^1 + 2\int_0^1 e^x\,dx = e - 2e + 2[e^x]_0^1 = \mathbf{e - 2}$.

4. Bestäm volymen av rotationskroppen som uppkommer då $f(x) = \sin(x)$ roterar kring x-axeln för $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.
Lösn. $V = \pi\int_0^{\pi/2}\sin^2(x)\,dx = \pi\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx = \boldsymbol{\frac{\pi^2}{4}}$.

5. Använd Simpsons formel med ett delintervall för att bestämma $\int_0^1 x^3\,dx$.
Lösn. $S_1 = \frac{1}{6}(0^3 + 4\frac{1}{2^3} + 1) = \mathbf{\frac{1}{4}}$ (Simpson är exakt för tredjegradspolynom).

6. Lös differentialekvationen $u' + 2xu = x$ med $u(0) = 0$.
Lösn. Multiplikation med integrerande faktor ger

$$(ue^{x^2})' = e^{x^2}(u' + 2xu) = xe^{x^2}.$$

Vi bestämmer primitivfunktion och får $u(x)e^{x^2} = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$. Begynnelsevillkoret ger $C = -\frac{1}{2}$. Vi får $u(x) = \mathbf{\frac{1}{2}(1 - e^{-x^2})}$.

7. Lös differentialekvationen $u''(x) + 2u'(x) + u(x) = 0$, $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$.
Lösn. Vi ansätter $u(x) = e^{rx}$ och får den karaktäristiska ekvationen $r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2 = 0$ med dubbelrot $r = -1$. Vi får därmed lösningar

$$u(x) = (Ax + B)e^{-x}.$$

Konstanterna ges av begynnelsevillkoret $B = 0$ och $u'(0) = Ae^{-0} - A0e^{-0} = A = 1$, alltså $u(x) = \mathbf{xe^{-x}}$. `/axel`