DUGGA

TMV151
Matematisk analys i en variabel M1, 20XX–XX–XX
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje rätt svar ger 1 bonuspoäng på tentan. ANGE ENDAST SVAR PÅ UPPGIFTERNA.

Namn:..**Antagningsår**..........................

Personnummer:...**Email**...

1. Givet $f(x) = 1 - x$ och en partition av intervallet $[0, 1]$ i n lika långa delintervall, beräkna den övre Riemannsumman (uttryckt i termer av n).
Lösn. Låt $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, \ldots, n$. Eftersom funktionen är avtagande fås maximum i varje delintervall $[x_{i-1}, x_i]$ i den vänstra punkten x_{i-1}. Den övre Riemannsumman ges därför av $I_{\max}(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n}(1 - \frac{i-1}{n})\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1} i = 1 - \frac{n-1}{2n} = \mathbf{\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}}$.

2. Bestäm integralen $\int_0^{\pi/2} \sin(x)^2 \cos(x)\, dx$.
Lösn. Vi gör substitutionen $u = \sin(x)$, $du = \cos(x)\, dx$, $u(0) = 0$ och $u(\pi/2) = 1$,

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)^2 \cos(x)\, dx = \int_0^1 u^2\, du = \mathbf{\frac{1}{3}}.$$

3. Bestäm integralen $\int_1^2 \frac{1}{x(1+x)}\, dx$.
Lösn. Partialbråksuppdelninig ger $\frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}$. Primitivfunktionen ges därför av $\log|x| - \log|1 + x| = \log|\frac{x}{1+x}|$. Vi får $\int_1^2 \frac{1}{x(1+x)}\, dx = \log(\frac{2}{3}) - \log(\frac{1}{2}) = \log(\mathbf{\frac{4}{3}})$.

4. Bestäm längden av kurvan $f(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}$ mellan $x = 0$ och $x = 1$.
Lösn. Vi får $s = \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + x}\, dx = \int_1^2 \sqrt{u}\, du = \mathbf{\frac{2}{3}(2^{3/2} - 1)}$.

5. Använd mittpunktsregeln för att approximera $\int_0^1 x^2\, dx$ med två lika långa delintervall.
Lösn. $M_2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{16} + \frac{9}{16}) = \mathbf{\frac{5}{16}}$.

6. Lös differentialekvationen $\cos(y)y' = x$ med $y(0) = \pi/4$.
Lösn. Variabelseparation ger

$$\sin(y) = \int \cos(y)\, dy = \int x\, dx = \frac{x^2}{2} + C.$$

Begynnelsevillkoret ger $\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin(\pi/4) = C$. Vi får $y(x) = \arcsin(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}})$.

7. Lös differentialekvationen $x^2y''(x) + xy'(x) - y(x) = 0$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 0$.
Lösn. Vi ansätter $y(x) = x^r$ och får den karaktäristiska ekvationen $0 = r(r - 1) + r - 1 = r^2 - 1$ vilket ger lösning

$$y(x) = Ax + \frac{B}{x}.$$

Konstanterna ges av begynnelsevillkoret $A = B = 1$ alltså $y(x) = x + \frac{1}{x}$.
Lösn. `/axel`