MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Axel Målqvist
Telefonvakt: Tony Stillfjord, tel. 031–7725309

TMV151
2016–01–16 kl. 08.30–12.30 (SB)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV151 Matematisk analys i en variabel M

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilket tillsammans ger maximala 50p. Till detta läggs bonuspoäng (maximalt 7p). Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet. Granskningstillfälle kommer meddelas på hemsidan.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Lycka till!

Axel

TMV151 Matematisk analys i en variabel M

Tentamensuppgifter

---

1. Studera detta Matlab-program: (3p)

```
x = 0; S = 0; n = 100;

while x < 1
  x = x + 1/n;
  dS = 2*x/n;
  S = S + dS;
end
```

Vilket värde får variabeln S?
Lösn. Vi har $S = \sum_{i=1}^{n} \frac{2i}{n^2} = \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = 1 + \frac{1}{n} = 1.01$.

2. Beräkna $\int_0^1 x\sin(1+x^2)\,dx$. (3p)
Lösn. Variabelsubstitution med $u = 1 + x^2$ och $du = 2x\,dx$ ger,

$$\int_0^1 x\sin(1+x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \sin(u)\,du = \frac{1}{2}[-\cos(u)]_1^2 = \frac{\cos(1)-\cos(2)}{2}.$$

3. Beräkna $\int_0^1 x^2 e^x\,dx$. (3p)
Lösn. Partiell integration ger,

$$\int_0^1 x^2 e^x\,dx = [x^2e^x]_0^1 - \int_0^1 2xe^x\,dx = e - 2[xe^x]_0^1 + 2\int_0^1 e^x\,dx = -e + 2[e^x]_0^1 = e - 2.$$

4. Beräkna volymen av den rotationskropp som bildas då området som begränsas av funktionen $\sin(x)$ och x-axeln mellan $x = 0$ och $x = \pi$ roterar runt x-axeln. (3p)
Lösn. Vi har $\pi\int_0^\pi \sin(x)^2\,dx = \pi\int_0^\pi \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{\pi^2}{2}$.

5. Låt ett området R i planet begränsas av x-axeln, y-axeln, $x = 1$ och funktionen $f(x) = x(1-x)$. Beräkna centroiden för R. (3p)
Lösn. Symmetri ger $\bar{x} = \frac{1}{2}$. Centroidens y koordinat ges av,

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^1 x^2(1-x)^2\,dx}{\int_0^1 x(1-x)\,dx} = \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{10}.$$

Vi får $(\bar{x},\bar{y}) = (\frac{1}{2},\frac{1}{10})$.

6. Lös differentialekvationen $y'(x) = 2\cos(x)\sqrt{y(x)}$ med begynnelsevillkoret $y(\pi/2) = 1$. (3p)
Lösn. Differentialekvationen är separabel. Vi får,

$$2\sqrt{y} = \int y^{-1/2}\,dy = 2\int \cos(x)\,dx = 2\sin(x) + C'.$$

Vi får $y(x) = (\sin(x)+C)^2$. Begynnelsevillkoret ger $1 = y(\pi/2) = (1+C)^2$ ger att $C = 0$ eller $C = -2$. Lösningen ges av $y(x) = \sin(x)^2$ eller $y(x) = (\sin(x)-2)^2$.

7. Lös differentialekvationen $x^2y''(x) - \frac{3}{4}y = 0$ med begynnelsevillkor $y(1) = 2$ och $y'(1) = 1$. (3p)
Lösn. Deta är en Euler ekvation. Vi ansätter $y(x) = x^r$. Det ger det karakteristiska polynomet $r(r-1) - \frac{3}{4} = 0$ med lösningar $r_1 = \frac{3}{2}$ och $r_2 = -\frac{1}{2}$. Den allmänna lösningen ges av $y(x) = C_1x^{3/2} + C_2x^{-1/2}$. Vi har att $y(1) = C_1 + C_2 = 2$ och $1 = y'(1) = \frac{3}{2}C_1 - \frac{1}{2}C_2$ vilket ger $C_1 = C_2 = 1$. Alltså $y(x) = x^{3/2} + x^{-1/2}$.

8. Hitta den allmänna lösningen till differentialekvationen $y''(x) - 4y'(x) - 5y(x) = x$. (3p)
Lösn. Den karakteristiska ekvationen ges av $r^2 - 4r - 5 = 0$ med lösningar $r_1 = 5$ och $r_2 = -1$. Homogenlösningen ges av $y_h(x) = C_1e^{5x} + C_2e^{-x}$. En partikulärlösning ges av $y_p(x) = -\frac{1}{5}x + \frac{4}{25}$. Den allmänna lösningen $y(x) = C_1e^{5x} + C_2e^{-x} - \frac{1}{5}x + \frac{4}{25}$.

9. Beräkna vinkeln mellan vektorerna $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ och $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ (där $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ är enhetsvektorerna i x, y, z riktningarna) genom att använda skalärprodukten. (3p)
Lösn. Låt $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ och $\mathbf{w} = \mathbf{i} - \mathbf{2j} - \mathbf{k}$. Vi har att vinkeln $\cos(\theta) = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{|\mathbf{v}||\mathbf{w}|}$. Vi har att $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = -\mathbf{2}$, $|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{3}}$ och $|\mathbf{w}| = \sqrt{\mathbf{6}}$. Vinkeln ges av $\cos(\theta) = \frac{-\sqrt{2}}{3}$. Därför har vi $\theta = \arccos(\frac{-\sqrt{2}}{3})$.

10. Skriv om systemet: (3p)

$$\begin{cases} y_1'(t) &= y_2(t) \\ y_2'(t) &= ty_1(t)^2 \end{cases}$$

som en 2:a ordningens differentialekvation i variabeln $y(t) = y_1(t)$.
Lösn. Vi får $y''(t) = ty(t)^2$.

---

11. Faltningen mellan funktionerna $f(t)$ och $g(t)$ är definierad som $(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$. Visa att $(f * g)(t) = (g * f)(t)$. (5p)
Lösn. Vi får med variabelsubstitutionen $\bar{t} = t - \tau$,

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau = -\int_t^0 f(t-\bar{t})g(\bar{t})\,d\bar{t} = \int_0^t f(t-\bar{t})g(\bar{t})\,d\bar{t} = (g * f)(t).$$

12. Definiera e^x som lösning till en första ordningens linjär differentialekvation. Visa att $e = \lim_{n\to\infty}(1 - n^{-1})^{-n}$ genom att approximera lösningen i $x = 1$ med Bakåt Euler-metoden och låt antalet delintervall vara n. (5p)
Lösn. Differentialekvationen är $y'(x) = y(x)$ med begynnelsevillkoret $y(0) = 1$. Bakåt Euler approximationen i $x = 1$ ges av $y_n = y_{n-1} + \frac{1}{n}y_n$ vilket innebär $y_n = (1-n^{-1})^{-1}y_{n-1} = (1-n^{-1})^{-n}y_0 = (1-n^{-1})^{-n}$. Vi låter nu $n \to \infty$. Vi får $e = y(1) = \lim_{n\to\infty}(1-n^{-1})^{-n}$.

13. Formulera och bevisa medelvärdessatsen för integraler. (5p)
Lösn. Se Sats 4 i kapitel 5 i Adams/Essex.

14. Beräkna längden av kurvan $f(x) = x^{1/2} - \frac{1}{3}x^{3/2}$ mellan $x = 0$ och $x = 1$. (5p)
Lösn. Vi har att $L = \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$. Vi har $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} - \frac{1}{2}x^{1/2}$ och därmed

$$1 + f'(x)^2 = 1 + \frac{1}{4}(x^{-1} - 2 + x) = (\frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{2}x^{1/2})^2.$$

Vi får att

$$L = \int_0^1 \frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{2}x^{1/2}\,dx = \frac{1}{2}[\frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2}]_0^1 = \frac{4}{3}.$$

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Axel Målqvist
Telefonvakt: Tony Stillfjord, tel. 031–7725309

TMV151
2016–01–16 kl. 08.30–12.30 (SB)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV151 Matematisk analys i en variabel M

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	Svar	Poäng
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		