MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Axel Målqvist
Telefonvakt: Tim Cardilin, tel. 031–7725325

TMV151
2016–04–08 kl. 14.00–18.00 (M)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV151 Matematisk analys i en variabel M

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilket tillsammans ger maximala 50p. Till detta läggs bonuspoäng (maximalt 7p). Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet. Granskningstillfälle kommer meddelas på hemsidan.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Lycka till!

Axel

TMV151 Matematisk analys i en variabel M

Tentamensuppgifter

---

1. Låt partitionen $P = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ och funktionen $f(x) = x^4$. Beräkna den undre Riemann summan $L(f, P)$. (3p)
Lösn. $L(f, P) = \frac{1}{2}(0^4 + (\frac{1}{2})^4) = \frac{1}{32}$.

2. Beräkna $\int_{-1}^{1} x \sin(x)\, dx$. (3p)
Lösn. Partiell integration ger,

$$\int_{-1}^{1} x\sin(x)\,dx = 2\int_0^1 x\sin(x)\,dx = -2[x\cos(x)]_0^1 + 2\int_0^1 \cos(x)\,dx = 2(\sin(1) - \cos(1)).$$

3. Beräkna $\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx$. (3p)
Lösn. Variabelsubstitutionen $u = 1 + x^2$ ger,

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 u^{1/2}\,du = \frac{1}{3}(2^{3/2} - 1).$$

4. Beräkna approximationen av integralen $\int_0^1 x^2\,dx$ med mittpunktsmetoden. Använd två lika långa delintervall. (3p)
Lösn. $M_2 = \frac{1}{2}((\frac{1}{4})^2 + (\frac{3}{4})^2) = \frac{5}{16}$.

5. Beräkna volymen av den rotationskropp som bildas då området som begränsas av funktionen x^3 och x-axeln mellan $x = 0$ och $x = 1$ roterar runt x-axeln. (3p)
Lösn.

$$V = \pi\int_0^1 x^6\,dx = \frac{\pi}{7}.$$

6. Låt R vara triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(0, 1)$. Vidare anta att området R upptas av ett material med densitet $\sigma(x) = 1 + x$. Beräkna materialets tyngdpunkt. (3p)
Lösn. Massan ges av $m = \int_0^1 (1+x)(1-x)\,dx = \frac{2}{3}$. Momentet runt x-axeln ges av, $M_{x=0} = \int_0^1 (1+x)x(1-x)\,dx = \frac{1}{4}$, och $M_{y=0} = \frac{1}{2}\int_0^1 (1+x)(1-x)^2\,dx = \frac{5}{24}$. Detta ger $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{3}{8}, \frac{5}{16})$.

7. Lös differentialekvationen $y'(x) + xy(x) = x$ med begynnelsevillkor $y(0) = 2$. (3p)
Lösn. Vi multiplicerar ekvationen med den integrerande faktorn $e^{\frac{x^2}{2}}$,

$$(y(x)e^{\frac{x^2}{2}})' = xe^{\frac{x^2}{2}}.$$

We compute the antiderivative,

$$y(x)e^{\frac{x^2}{2}} = e^{\frac{x^2}{2}} + C,$$

i.e. $y(x) = 1 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}$. Furthermore, $y(0) = 2$, gives us $C = 1$, $y(x) = 1 + e^{-\frac{x^2}{2}}$.

8. Lös differentialekvationen $y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = 0$ med begynnelsevillkor $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$. (3p)
Lösn. Karaktäristiska ekvationen ges av $r^2 + 5r + 6 = 0$ med lösningar $r_1 = -2$ and $r_2 = -3$. Lösningen ges av $y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$. Furthermore, $0 = y(0) = C_1 + C_2$, and $-2C_1 - 3C_2 = -C_2 = 1$, i.e. $y(x) = e^{-2x} - e^{-3x}$.

9. Givet de två vektorerna $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $w = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$ beräkna den mellanliggande vinkeln. (3p)
Lösn. Skalärprodukten $\cos(\theta) = \frac{v \cdot w}{|v||w|} = \frac{1}{2}$ ger att $\theta = \frac{\pi}{3}$.

10. Beräkna Laplace transformen av e^t, $F(s) = \int_0^\infty e^t e^{-st}\, dt$, där $s \in \mathbb{C}$ sådan att $Re(s) > 1$. (3p)
Lösn.

$$F(s) = \int_0^\infty e^t e^{-st}\, dt = \frac{1}{1-s}[e^{(1-s)t}]_0^\infty = \frac{1}{s-1},$$

since $e^{(1-s)t} \to 0$ because of $Re(s)$ as $t \to \infty$.

---

11. Låt $f(x) = \sin(x)^3$ och $T_n \approx I = \int_0^1 f(x)\, dx$ vara approximationen till integralen I med trapetsmetoden på n lika stora delintervall. Skriv ner ett uttryck för T_n. Hur beror felet $|T_n - I|$ på n? Hur beror felet på n om Simpson's formel används istället? (5p)
Lösn. Vi har,

$$T_n = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} \left(\sin(\frac{i-1}{n})^3 + \sin(\frac{i}{n})^3 \right).$$

Felet ges av $|I - T_n| \le \frac{C}{n^2}$ för en konstant C. Med Simpson's metod blir felet $|I - S_n| \le \frac{C}{n^4}$.

12. Bevisa att triangelns centroid är den punkt där medianerna skär varandra. (5p)
Lösn. Se Sats 1 i kapitel 7.5 i Adams/Essex.

13. Låt $y(t)$ vara lösning till den ordinära differentialekvationen, (5p)

$$y'(t) = t \cdot \sin y(t),$$

med begynnelsevillkor $y(0) = 1$. Skriv ett Matlab program som returnerar Framåt Euler approximationen av $y(1)$ med n med steglängd $\frac{1}{100}$.
Lösn.
```
t = 0; y = 1; n = 100; while t < 1
  y=y+t*sin(y)/n;
  t = t + 1/n;
end
```

14. Låt $y(t)$ vara lösning till (5p)

$$y' = y^2,$$

med begynnelsevillkor $y(0) = 1$. Avgör om $f(y) = y^2$ är Lipschitz kontinuerlig för alla $y \in \mathbb{R}$. Beräkna $y(t)$. Hur beter sig lösningen då $t \to 1$?
Lösn. Funktionen y^2 är inte Lipschitz kontinuerlig eftersom $|y^2 - z^2| = |y + z||y - z|$ och $|y + z|$ inte är begränsad för alla $y, z \in \mathbb{R}$. Variabelseparation ger $-\frac{1}{y} = \int \frac{dy}{y^2} = \int 1\, dt = t + C$. Begynnelsevillkoret $1 = y(0) = \frac{1}{-C-0}$ ger $C = -1$. Detta ger $y(t) = \frac{1}{1-t}$. Lösningen går mot oändligheten i $t = 1$.

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Axel Målqvist
Telefonvakt: Tim Cardilin, tel. 031–7725325

TMV151
2016–04–08 kl. 14.00–18.00 (M)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV151 Matematisk analys i en variabel M

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	Svar	Poäng
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		