MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Axel Målqvist
Telefonvakt: Axel Målqvist tel. 031–7723599

TMV151
2017–01–14 kl. 08.30–12.30 (M)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV151 Matematisk analys i en variabel M

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilket tillsammans ger maximala 50p. Till detta läggs bonuspoäng (maximalt 7p). Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet. Granskningstillfälle kommer meddelas på hemsidan.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Lycka till!

Axel

TMV151 Matematisk analys i en variabel M

Tentamensuppgifter

---

1. Studera detta Matlab-program: (3p)

```
S = 0; x = 0;
while x < 1
  S = S + x^2;
  x = x + 0.1;
end
```

Vilket värde får variabeln S?
Lösn. $\sum_{j=1}^{9} \frac{j^2}{100} = \frac{1}{100}\frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6} = \frac{57}{20}$.

2. Låt $f(x) = x$ för $0 \le x \le 1$, $f(x) = 1$ för $1 \le x \le 2$ och $f(x) = 3 - x$ för $2 \le x \le 3$. (3p)
Beräkna $\int_0^3 f(x)\,dx$.
Lösn. $\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 1\,dx + \int_2^3 (3-x)\,dx = 2$.

3. Beräkna $\int_0^1 x\sqrt{1+3x^2}\,dx$. (3p)
Lösn. Låt $u = 1+3x^2$ och därmed $du = 6xdx$, $u(0) = 1$ och $u(1) = 4$. Vi får $\int_0^1 x\sqrt{1+3x^2}\,dx = \frac{1}{6}\int_1^4 \sqrt{u}\,du = \frac{1}{6}\frac{2}{3}(4^{3/2} - 1^{3/2}) = \frac{7}{9}$.

4. Beräkna $\int_0^\pi x\sin(x)\,dx$. (3p)
Lösn. Partiell integration ger, $\int_0^\pi x\sin(x)\,dx = [-x\cos(x)]_0^\pi + \int_0^\pi \cos(x)\,dx = \pi$.

5. För vilket värde p gäller $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = 1$? (3p)
Lösn. Eftersom integraler är konverget måste $p > 1$. Vi får $1 = \int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = [\frac{x^{1-p}}{1-p}]_0^\infty = \frac{1}{p-1}$ vilket innebär att $p = 2$.

6. Beräkna volymen av den rotationskropp som bildas då området som begränsas av funktionerna $y = x^2$ och $y = 1$ roterar runt y-axeln. (3p)
Lösn. Volymen ges av $V = \int_0^1 (1-x^2)2x\pi\,dx = \frac{\pi}{2}$.

7. Låt ett område R i planet begränsas av x-axeln, y-axeln och funktionen $f(x) = 1 - x$. Låt densiteten variera som $\sigma(x) = 1 + x$. Beräkna masscentrum för R. (3p)
Lösn. Massan är $m = \int_0^1 (1-x)(1+x)\,dx = \frac{2}{3}$. Momenten ges av $M_{x=0} = \int_0^1 x(1-x)(1+x)\,dx = \frac{1}{4}$ och $M_{y=0} = \frac{1}{2}\int_0^1 (1+x)(1-x)^2\,dx = \frac{5}{24}$. Därför får vi $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{3}{8}, \frac{5}{16})$.

8. Lös differentialekvationen $y'(x) = \frac{x}{y}$ med begynnelsevillkoret $y(1) = 2$. (3p)
Lösn. Den är separabel. $\frac{y^2}{2} = \int y\,dy = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$. Eftersom $y(1) = 1$ är $C = \frac{3}{2}$. Vi får $y(x) = \sqrt{3+x^2}$.

9. Lös differentialekvationen $y''(x) - 4y(x) = 4x$ med begynnelsevillkoren $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$. (3p)
Lösn. Vi får partikulärlösningen genom att ansätta $y_p = Ax + B$. Den blir efter insättning $y_p(x) = -x$. Karaktäristiska ekvationen är $r^2 - 4 = 0$ med lösningar $r_1 = 2$ och $r_2 = -2$. Den allmänna lösningen ges av $y(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x} - x$. Begynnelsevillkoren ger $0 = y(0) = A + B$ och $3 = 2A - 2B - 1 = 4A - 1$ alltså $A = 1$ och $B = -1$. Lösningen blir $y(x) = e^{2x} - e^{-2x} - x$.

10. Studera ekvationen $y'(x) = 2y(x)$, med begynnelsevillkor $y(0) = 1$. Vad blir Bakåt Euler approximationen till $y(1)$ givet att intervallet $[0,1]$ deles in i n lika stora delintervall? (3p)
Lösn. Vi får $y_n = (1 - \frac{2}{n})^{-1} y_{n-1} = \cdots = (1 - \frac{2}{n})^{-n}$.

---

11. Studera begynnelsevärdesproblemet $y''(t) + y(t)^2 = \sin(t)$, $y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$. Skriv som ett system av första ordningen och utför ett steg med Framåt Euler, med steglängd $h = 0.1$. (5p)
Lösn. Låt $y_1 = y$, $y_2 = y'$.

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ \sin(t) - y_1^2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Med $t_n = nh$, $n = 0, 1, \ldots$, ges Framåt Euler lösningen av:

$$\begin{bmatrix} y_1^{n+1} - y_1^n \\ y_2^{n+1} - y_2^n \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} y_2^n \\ \sin t_n - (y_1^n)^2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} (y_1)_0 \\ (y_2)_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vi får $y_1^1 = 1$ och $y_2^1 = -0.1$.

12. Skriv en Matlab rutin som utför 10 steg av Framåt Euler för ekvationen i problem 11. (5p)
Lösn.

```
y = [1;0]; t = 0; h=0.1;
while t < 1
  y = y + h*[y(2);sin(t)-y(1)^2];
  t = t + 0.1;
end
```

13. Formulera och bevisa Pappus sats (första delen om volymen av en rotationskropp). (5p)
Lösn. Se Adams/Essex sidan 421.

14. Använd Laplace transform för att lösa ekvationen $2y'(t) + 4y(t) = 1$ med begynnelsevillkor $y(0) = 3$. *Hint: Laplacetransformen av $f(t) = e^{at}$ ges av $F(s) = \frac{1}{s-a}$.* (5p)
Lösn. Laplace transformering ger $2sY(s) - 6 + 4Y(s) = \frac{1}{s}$. Alltså $Y(s) = \frac{3}{s+2} + \frac{1/2}{s(s+2)}$. Vi partialbråksuppdelar den andra termen $\frac{1}{s(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2}$ där $A = 1/2$ och $B = -1/2$. Alltså$Y(s) = \frac{11/4}{s+2} + \frac{1/4}{s}$. Därför blir $y(t) = \frac{1}{4} + \frac{11}{4} e^{-2t}$.

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Axel Målqvist
Telefonvakt: Axel Målqvist tel. 031–7723599

TMV151
2017–01–14 kl. 08.30–12.30 (M)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV151 Matematisk analys i en variabel M

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	Svar	Poäng
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		