MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Axel Målqvist
Telefonvakt: Fanny Berglund tel. 031–7725325

TMV151
2018–08–20 kl. 08.30–12.30 (SB)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV151 Matematisk analys i en variabel M

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilket tillsammans ger maximala 50p. Till detta läggs bonuspoäng (maximalt 7p). Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet. Granskningstillfälle kommer meddelas på hemsidan.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Lycka till!

Axel

MATEMATISKA VETENSKAPER **TMV151**
Chalmers tekniska högskola **2018–08–20 kl. 08.30–12.30 (SB)**
Examinator: Axel Målqvist **Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa**
Telefonvakt: Fanny Berglund tel. 031–7725325

TMV151 Matematisk analys i en variabel M

Tentamensuppgifter

---

1. Studera detta Matlab-program: (3p)

```
S = 0; x = 1;
while x > 0.1
  S = S + x;
  x = x / 2;
end
```

Vilket värde får variabeln S?
Lösn. $S = 1 + 0.5 + 0.25 + 0.125 = 1.875$.

2. Låt $f(x) = 2x$ för $0 \le x \le 1$, $f(x) = 3 - x$ för $1 \le x \le 2$ och $f(x) = 1$ för $2 \le x \le 3$. (3p)
Beräkna $\int_0^3 f(x)\,dx$.
Lösn. $\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^1 2x\,dx + \int_1^2 3 - x\,dx + \int_2^3 1\,dx = 3.5$.

3. Beräkna $\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$. (3p)
Lösn. Variabelsubstitutionen $u = x^2$ ger $\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-u}\,du = \frac{1}{2}(1 - e^{-1})$.

4. Beräkna $\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx$. (3p)
Lösn. Vi har att $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ varför $\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1 - \cos(2x))\,dx = \frac{\pi}{2}$.

5. För vilka värde på p divergerar $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$? (3p)
Lösn. $p \ge 1$.

6. Beräkna volymen av den rotationskropp som bildas då området som begränsas av funktionerna $y = x^2$ och $y = x$ $(0 \le x \le 1)$ roterar runt x-axeln. (3p)
Lösn. Volymen ges av $V = \int_0^1 x^2\pi\,dx - \int_0^1 x^4\pi\,dx = \frac{2\pi}{15}$.

7. Låt ett område R i planet begränsas av x-axeln, y-axeln och funktionen $f(x) = \cos(x)$ $(0 \le x \le \pi/2)$. Beräkna centroiden för R. (3p)
Lösn. Arean är $m = \int_0^{\pi/2} \cos\,dx = 1$. Momenten ges av $M_{x=0} = \int_0^{\pi/2} x\cos(x)\,dx = [x\sin(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(x)\,dx = \pi/2 - 1$ och $M_{y=0} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}(1 + \cos(2x))\,dx = \frac{\pi}{8}$. Därför får vi $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{8})$.

8. Lös differentialekvationen $y'(x) + xy(x) = x$ med begynnelsevillkoret $y(0) = 1$. (3p)
Lösn. Multiplikation med integrarande faktor ger $(y(x)e^{x^2/2})' = xe^{x^2/2}$ vilket ger $y(x)e^{x^2/2} = e^{x^2/2} + C$. Begynnelsevillkoret ger $C = 0$ alltså $y = 1$.

9. Lös differentialekvationen $y''(x) - 3y'(x) - 4y(x) = -4x - 3$ med begynnelsevillkoren $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. (3p)
Lösn. Vi får partikulärlösningen genom att ansätta $y_p = Ax + B$. Den blir efter insättning $y_p(x) = x$. Karaktäristiska ekvationen är $r^2 - 3r - 4 = 0$ med lösningar $r_1 = -1$ och $r_2 = 4$. Den allmänna lösningen ges av $y(x) = Ae^{-x} + Be^{4x} + x$. Begynnelsevillkoren ger $0 = y(0) = A + B$ och $0 = -A + 4B + 1$ alltså $A = 1/5$ och $B = -1/5$. Lösningen blir $y(x) = 1/5e^{-x} - 1/5e^{4x} + x$.

10. Studera ekvationen $y'(x) = y(x)$, med begynnelsevillkor $y(0) = 1$. Vad blir Bakåt Euler approximationen till $y(1)$ givet att intervallet $[0, 1]$ delas in i n lika stora delintervall? (3p)
Lösn. Vi låter approximationen vid $x_i = i/n$ ges av y_i. Vi får då relationen $y_n = (1 - 1/n)^{-1} y_{n-1} = (1 - 1/n)^{-n} y_0 = (1 - 1/n)^{-n}$.

---

11. Studera begynnelsevärdesproblemet $y'''(t) + 2y(t)^2 = t^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ och $y''(0) = 1$. Skriv som ett system av första ordningen och utför ett steg med Eulers metod (Framåt Euler), med steglängd $h = 0.1$. (5p)
Lösn. Låt $y_1 = y$, $y_2 = y'$ och $y_3 = y''$.

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ t^2 - 2y_1^2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Med $t_n = nh$, $n = 0, 1, \ldots$, ges Framåt Euler lösningen av:

$$\begin{bmatrix} y_1^{n+1} - y_1^n \\ y_2^{n+1} - y_2^n \\ y_3^{n+1} - y_3^n \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} y_2^n \\ y_3^n \\ t_n^2 - 2(y_1^n)^2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} (y_1)_0 \\ (y_2)_0 \\ (y_3)_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi får $y_1^1 = 1$, $y_2^1 = 0.1$ och $y_3^1 = 0.8$.

12. Skriv en Matlabrutin som beräknar övre Riemannsumman för funktionen $f(x) = \sin(x)$ mellan $x = 0$ och $x = \pi$ med 100 delintervall av samma längd. (5p)
Lösn.
```
U = 0; x = 0; n = 100;
while x < pi
  xh = x + pi/n;
  if x < pi/2
    xu = xh;
  else
    xu = x;
  end
  U = U + 1/n*sin(xu);
  x = xh;
end
```

13. Formulera och bevisa Formulera och bevisa analysens fundamentalsats. (5p)
Lösn. Se kursboken.

14. Använd Laplace transform för att lösa ekvationen $y'(t) + y(t) = 1$ med begynnelsevillkor $y(0) = 2$. (5p)
Lösn. Laplace transformering ger $sY(s) - 2 + Y(s) = \frac{1}{s}$. Alltså $Y(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s(s+1)}$. Vi partialbråksuppdelar den andra termen $\frac{1}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1}$ där $A = 1$ och $B = -1$. Alltså$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$. Därför blir $y(t) = 1 + e^{-t}$.

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Axel Målqvist
Telefonvakt: Fanny Berglund tel. 031–7725325

TMV151
2018–08–20 kl. 08.30–12.30 (SB)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV151 Matematisk analys i en variabel M

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	**Svar**	**Poäng**
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		