MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Axel Målqvist
Telefonvakt: Axel Målqvist, tel. 031–7723599

TMV151
2019–01–17 kl. 14.00–18.00 (SB)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV151 Matematisk analys i en variabel M

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilket tillsammans ger maximala 50p. Till detta läggs bonuspoäng (maximalt 7p). Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet. Granskningstillfälle kommer meddelas på hemsidan.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Lycka till!

Axel

TMV151 Matematisk analys i en variabel M

Tentamensuppgifter

---

1. Bestäm den undre Riemann-summan för funktionen $f(x) = 2x$ på intervallet $[0, 1]$ med n lika stora delintervall. (3p)
Lösn. $I_{\min} = \sum_{i=1}^{n} 2\frac{i-1}{n}\frac{1}{n} = \frac{2}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{2}{n^2}\frac{(n-1)n}{2} = 1 - \frac{1}{n}$.

2. Bestäm integralen $\int_0^{10} |\sin(\pi x)|\,dx$. (3p)
Lösn. $\int_0^{10} |\sin(\pi x)|\,dx = 10\int_0^1 |\sin(\pi x)|\,dx = 10\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx = 10[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)]_0^1 = \frac{20}{\pi}$.

3. Bestäm integralen $\int_0^{\pi/2} \sin(x)^2\cos(x)\,dx$. (3p)
Lösn. Låt $u = \sin(x)$, $du = \cos(x)dx$, $u(0) = 0$ och $u(\pi/2) = 1$. $\int_0^{\pi/2} \sin(x)^2\cos(x)\,dx = \int_0^1 u^2\,du = \frac{1}{3}$.

4. Bestäm integralen $\int_1^2 \ln(x)\,dx$. (3p)
Lösn. Partiell integration för integranden $1 \cdot \ln(x)$. $\int_1^2 \ln(x)\,dx = [x\ln(x)]_1^2 - \int_1^2 x\frac{1}{x}\,dx = 2\ln(2) - 1$.

5. Bestäm integralen $\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}\,dx$. (3p)
Lösn. Faktorisera nämnaren $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$. Partialbråksuppdelning ger $\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$ med $A+B = 0$ och $2A+B = 1$ med lösningar $A = 1$ och $B = -1$. Vi får $\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}, dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\,dx = [\ln(1+x) - \ln(2+x)]_0^1 = 2\ln(2) - \ln(3) = \ln(4/3)$.

6. Lös begynnelsevärdesproblemet $u'(x) + 2xu(x) = x$, $u(0) = 2$. (3p)
Lösn. Multiplikation med integrerande faktor e^{x^2} ger $(u(x)e^{x^2})' = xe^{x^2}$. Vi bestämmer primitivfunktioner på båda sidor $u(x)e^{x^2} = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$ eller $u(x) = \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}$. Begynnelsevillkoren ger $u(0) = \frac{1}{2} + C = 2$ vilket ger $u(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-x^2}$.

7. Lös begynnelsevärdesproblemet $u''(x) + u'(x) - 2u(x) = 0$, $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$. (3p)
Lösn. Den karaktäristiska ekvationen $r^2 + r - 2 = 0$ har rötter $r_1 = 1$ och $r_2 = -2$. Vi får lösningsansatsen $u(x) = Ae^x + Be^{-2x}$. Begynnelsevillkoren ger $A + B = 0$ och $A - 2B = 1$ alltså $A = 1/3$ och $B = -1/3$. Lösningen blir $u(x) = \frac{1}{3}e^x - \frac{1}{3}e^{-2x}$.

8. Bestäm Laplacetransformen av $f(t) = \cos(3t)$. (3p)
Lösn. Skriv $\cos(3t) = \frac{e^{i3t}+e^{-i3t}}{2}$. Vi får $\int_0^\infty e^{-st}\frac{e^{i3t}+e^{-i3t}}{2}\,dt = \frac{1}{2}[\frac{e^{(i3-s)t}}{3i-s} + \frac{e^{(-i3-s)t}}{-3i-s}]_0^\infty = \frac{1/2}{s+3i} + \frac{1/2}{s-3i} = \frac{s}{s^2+9}$.

9. Bestäm funktionen $u_1(t)$ som löser systemet (3p)

$$\begin{cases} u_1'(t) &= & u_2(t), \\ u_2'(t) &= & -u_1(t), \end{cases}$$

med begynnelsevillkor $u_1(0) = 0$ och $u_2(0) = 1$.
Lösn. u_1 löser $u_1'' + u_1 = 0$ med begynnelsevillkor $u_1(0) = 0$ och $u_1'(0) = 1$ allstså $u_1(t) = \sin(t)$.

10. Bestäm volymen av den rotationskropp som uppstår då en cirkel med radie 1 och centrum i koordinaten $(5,0)$ i xy-planet roterar runt y axeln. (3p)
Lösn. Guldins regel ger $V = 2\pi 5 \cdot \pi = 10\pi^2$.

---

11. Skriv en matlabrutin som löser $u'(t) = \sin(u(t))$, $u(0) = 1$, på intervallet $[0,1]$ med Bakåt Euler metoden, med steglängd $k = 0.1$. (5p)
Lösn.

```
n=10;T=1;k=T/n;
t=linspace(0,T,n+1);
u=zeros(1,n+1);
u(1)=1;
for i=1:n
  x=u(i); xold=x+1;
  while abs(x-xold)>1e-8
    xold=x;
    x=u(i)+k*sin(x);
  end
  u(i+1)=x;
end
```

12. Formulera och bevisa medelvärdessatsen för integraler. (5p)
Lösn. Sats 1.4 i blå boken.

13. Skriv som system av första ordningen och genomför en iteration av Eulers metod för differentialekvationen $u'''(x) + u'(x) = x^2$, $u(1) = 0$, $u'(1) = 1$, $u''(1) = 1$ med steglängd $k = 0.1$. (5p)
Lösn. Vi låter $u_1 = u$, $u_2 = u'$ och $u_3 = u''$. Systemet blir då:

$$\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ x^2 - u_2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} u_1(1) \\ u_2(1) \\ u_3(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Med $x_n = 1 + nk$, $n = 0, 1, \ldots$, ges Euler lösningen av:

$$\begin{bmatrix} u_1^{n+1} - u_1^n \\ u_2^{n+1} - u_2^n \\ u_3^{n+1} - u_3^n \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} u_2^n \\ u_3^n \\ (x_n)^2 - u_2^n \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \\ u_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Därför får vi

$$\begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 1.1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

14. Lös integralekvationen $u(x) = 2 + \int_2^x u^2(t)\,dt$. (5p)
Lösn. Vi deriverar ekvationen och får $u'(x) = u^2(x)$ med begynnelsevärde $u(2) = 2$. Variabelseparation $-u^{-1} = \int u^{-2}\,du = \int dx = x + C$. Begynnelsevärdet ger $-2^{-1} = 2 + C$ alltså $C = -5/2$. Vi får $-u(x)^{-1} = x - 5/2$ eller $u(x) = \frac{2}{5-2x}$.

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Axel Målqvist
Telefonvakt: Axel Målqvist, tel. 031–7723599

TMV151
2019–01–17 kl. 14.00–18.00 (SB)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV151 Matematisk analys i en variabel M

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	Svar	Poäng
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		