MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Axel Målqvist
Telefonvakt: Anton Johansson, tel. 031–7725325

TMV151
2019–04–24 kl. 14.00–18.00 (SB)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV151 Matematisk analys i en variabel M

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilket tillsammans ger maximala 50p. Till detta läggs bonuspoäng (maximalt 7p). Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet. Granskningstillfälle kommer meddelas på hemsidan.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Lycka till!

Axel

TMV151 Matematisk analys i en variabel M

Tentamensuppgifter

---

1. Bestäm den övre Riemann-summan för funktionen $f(x) = \sin(2x)$ på intervallet $[0, \pi]$ med 4 lika stora delintervall. (3p)
Lösn. Vi får $\pi/4 \cdot (1 + 1 + 0 + 0) = \pi/2$.

2. Bestäm integralen $\int_0^1 x^2 e^x \, dx$. (3p)
Lösn. Partiell integration två gånger ger $\int_0^1 x^2 e^x \, dx = [x^2 e^x]_0^1 - 2\int_0^1 xe^x \, dx = e - 2[xe^x]_0^1 + 2\int_0^1 e^x \, dx = e - 2e + 2(e-1) = e - 2$.

3. Bestäm integralen $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \, dx$. (3p)
Lösn. Variabelsubstitutionen $u = 1 + x^2$ ger $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \, dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{u} \, du = \frac{\ln(2)}{2}$.

4. Bestäm integralen $\int_0^1 \frac{1}{1+2x+x^2} \, dx$. (3p)
Lösn. Vi noterar att $1 + 2x + x^2 = (1 + x)^2$. Primitivfunktionen ges av $-(1 + x)^{-1}$ och integralen blir då $\int_0^1 \frac{1}{1+2x+x^2} \, dx = \frac{1}{2}$.

5. Beräkna en approximation till integralen $\int_0^1 x^2 \, dx$ med mittpunktsmetoden. Använd två lika stora delintervall. (3p)
Lösn. Mittpunktsmetoden ger $\int_0^1 x^2 \, dx \approx \frac{1}{2}(\frac{1}{16} + \frac{9}{16}) = \frac{5}{16}$.

6. Bestäm volymen hos den skål som bildas då området som begränsas av $y = x^2$, $x = 0$ och $y = 1$ roterar runt y-axeln. (3p)
Lösn. Rotationsvolymen ges av $V = 2\pi \int_0^1 x(1 - x^2) \, dx = 2\pi[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}]_0^1 = \frac{\pi}{2}$.

7. Lös differentialekvationen $y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = 1$, $y(1) = 1$, $x > 0$. (3p)
Lösn. Uppgiften går att lösa både med integrerande faktor och variabelseparation. Integrerande faktorn blir $e^{\ln(x)} = x$ för $x > 0$. Vi får $xy(x) = \int x \, dx = \frac{x^2}{2} + C$. Begynnelsevillkoret ger $y(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x}$.

8. Lös differentialekvationen $2x^2 y''(x) - xy'(x) - 2y(x) = 0$, $y(1) = 5$, $y'(1) = 0$. (3p)
Lösn. Detta är en Eulerekvation. Den karakräristiska ekvationen ges av $2r^2 - 3r - 2 = 0$ med lösningar $r = 2$ and $r = -0.5$. Den allmänna lösningen ges av $y(x) = Cx^2 + Dx^{-1/2}$. Insättning ger $y(x) = x^2 + \frac{4}{\sqrt{x}}$, $x > 0$.

9. Ett område i planet som begränsas av linjerna $y = 1 - x$, $x = 0$ och $y = 0$ är fyllt med ett material med densitet $1 + x$. Bestäm tyngdpunkten. (3p)
Lösn. Vi har $m = \int_0^1 (1 - x)(1 + x) \, dx = \frac{2}{3}$, $M_{x=0} = \int_0^1 x(1 - x)(1 + x) \, dx = \frac{1}{4}$ och $M_{y=0} = \frac{1}{2}\int_0^1 (1 + x)(1 - x)^2 \, dx = \frac{5}{24}$ vilket ger $\bar{x} = \frac{3}{8}$ och $\bar{y} = \frac{5}{16}$.

10. Bestäm Laplacetransformen av $f(t) = t^2$ (väldefinierad för $Re(s) > 0$). (3p)
Lösn. Partiell integration två gånger $\int_0^\infty t^2 e^{-st} \, dt = [t^2 \frac{e^{-st}}{-s}]_0^\infty + \frac{2}{s}\int_0^\infty te^{-st} \, dt = -\frac{2}{s^2}[te^{-st}]_0^\infty + \frac{2}{s^2}\int_0^\infty e^{-st} \, dt = -\frac{2}{s^3}[e^{-st}]_0^\infty = \frac{2}{s^3}$, om $Re(s) > 0$ är alla integraler är konvergenta.

---

11. Skriv en Matlabrutin som löser differentialekvationen $y'(x) = y(x)^2$ med begynnelsevillkor $y(0) = 1$ i intervallet $x \in [0, 0.5]$ med Eulers metod och $n = 100$ delintervall. (5p)

Lösn.

```
x = 0; y = 1;n = 100;

while x < 0.5
y = y + y*y/n;
x = x + 0.5/n;
end
```

12. Formulera och bevisa satsen som säger att volymen av en kropp ges av integralen av tvärsnittsarean $A(x)$. (5p)

Lösn. Se Sats 2.5 i blå boken.

13. Bestäm längden av kurvan $f(x) = x^{1/2} - \frac{1}{3}x^{3/2}$ mellan $x = 0$ och $x = 2$. (5p)

Lösn. Vi har att $L = \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$ och $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} - \frac{1}{2}x^{1/2}$. Därmed får vi

$$1 + f'(x)^2 = 1 + \frac{1}{4}(x^{-1} - 2 + x) = (\frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{2}x^{1/2})^2.$$

Vi får

$$L = \int_0^2 \frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{2}x^{1/2}\, dx = \frac{1}{2}[\frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2}]_0^2 = \frac{5\sqrt{2}}{3}.$$

14. Låt $u''(x) = (u'(x))^3$ med begynnelsevillkor $u(0) = 1$ och $u'(0) = -1$. Skriv som ett system av första ordningen och bestäm lösningen. (5p)

Lösn. Vi låter $u' = v$ vara första ekvationen och $v' = v^3$ den andra med begynnelsevillkor $u(0) = 1$ och $v(0) = -1$. Variabelseparation $\int v^{-3}\, dv = \int 1\, dx$ och insättning av begynnelsevillkor för v ger $v(x) = -(1 - 2x)^{-0.5}$. Genom att ta fram primitivfunktionen och begynnelsevillkor får vi även $u(x) = (1 - 2x)^{0.5}$.

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Axel Målqvist
Telefonvakt: Anton Johansson, tel. 031–7725325

TMV151
2019–04–24 kl. 14.00–18.00 (SB)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV151 Matematisk analys i en variabel M

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	Svar	Poäng
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		