MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Axel Målqvist
Telefonvakt: Barbara Schnitzer, tel. 031–7725325

TMV151
2019–08–19 kl. 08.30–12.30 (SB)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV151 Matematisk analys i en variabel M

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilket tillsammans ger maximala 50p. Till detta läggs bonuspoäng (maximalt 7p). Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet. Granskningstillfälle kommer meddelas på hemsidan.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Lycka till!

Axel

TMV151 Matematisk analys i en variabel M

Tentamensuppgifter

---

1. Bestäm arean mellan kurvorna $f(x) = x$ och $g(x) = x^2$ på intervallet $[0, 1]$. (3p)
Lösn. $\int_0^1 x - x^2\, dx = \frac{1}{6}$.

2. Bestäm integralen $\int_0^\pi \sin(x)\cos(x)\, dx$. (3p)
Lösn. $2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$, $\int_0^\pi \sin(x)\cos(x)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(2x)\, dx = 0$.

3. Bestäm $\int_0^2 \frac{1}{(x+1)(x+2)}\, dx$. (3p)
Lösn. Partialbråksuppdelning ger $\int_0^2 \frac{1}{(x+1)(x+2)}\, dx = \int_0^2 \frac{1}{x+1}\, dx - \int_0^2 \frac{1}{x+2}\, dx = \log(3) - \log(4) + \log(2) = \log(\frac{3}{2})$.

4. Bestäm kurvans längd: $f(x) = 2x^{3/2}$ för $x \in [0, 1/9]$. (3p)
Lösn. $\frac{d}{dx} x\sqrt{4x} = 3\sqrt{x}$. $\int_0^{1/9} \sqrt{1 + (3\sqrt{x})^2} dx = \left[\frac{2(1+9x)^{1.5}}{9\times 3}\right]_0^{1/9} = \frac{2\times 2^{1.5}}{27} - \frac{2}{27} = \frac{4\sqrt{2}-2}{27}$.

5. Lös begynnelsevärdesproblemet $u'(x) - x^2 u(x) = x^2$, $u(0) = 2$. (3p)
Lösn. $\int \frac{du}{u+1} = \int x^2\, dx \Leftrightarrow \ln|u+1| = x^3/3 + C'$ och $u = Ce^{\frac{x^3}{3}} - 1$. $u(0) = C - 1 = 2 \Rightarrow C = 3$, $u = 3e^{\frac{x^3}{3}} - 1$.

6. Lös begynnelsevärdesproblemet $u''(x) + 4u(x) = 0$, $u(0) = 0$, $u'(0) = 2$. (3p)
Lösn. Den allmänna lösningen är $u(x) = A\sin(2x) + B\cos(2x)$. Begynnelsevillkoren ger $u(x) = \sin(2x)$.

7. Bestäm Laplacetransformen av $3t + t^2$. (3p)
Lösn. På grund av linjäritet får vi $\mathcal{L}(3t + t^2)(s) = 3\mathcal{L}(t)(s) + \mathcal{L}(t^2)(s) = \frac{3}{s^2} + \frac{2}{s^3}$, där vi använder att $\mathcal{L}(t)(s) = \int_0^\infty e^{-st} t\, dt = [-\frac{t}{s}e^{-st}]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\, dt = \frac{1}{s^2}$ och motsvarande kalkyl för termen t^2, se Sats 4.11 i blå boken.

8. Lös ekvationssystemet (3p)

$$\begin{cases} x - y - 3z = 3 \\ \quad\;\; y + z = 2 \\ \;\; - 3y + 2z = -1 \end{cases}$$

Lösn. Andra ekvationen ger $z = 2 - y$ insatt i tredje får vi $-3y + 4 - 2y = -1$ vilket ger $y = 1$, vilket ger $z = 1$, och insatt i första ekvationen $x = 7$.

9. Låt $u(x)$ lösa $u'(x) = 2u(x)$, $u(0) = 1$. Beräkna approximationen till $u(1)$ med Eulers metod, med steglängd $1/10$. (3p)
Lösn. Eulers metod ger $u_n = u_{n-1} + \frac{2}{10}u_{n-1} = 1.2u_{n-1}$. Därför får vi $u(1) \approx u_{10} = 1.2^{10}$.

10. Bestäm tyngdpunkten för 100 lika stora punktmassor placerade i punkterna $x_1 = 1,\ x_2 = 2, \ldots, x_i = i, \ldots, x_{100} = 100$ längs x-axeln. (3p)
Lösn. $\bar{x} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} i = 50.5$.

11. Skriv en Matlab rutin som löser $u'(x) = u(x)^2$, $u(0) = 1$ med Eulers metod på intervallet $[0, 1]$ med steglängd $1/10$. (5p)

Lösn.
```
u=ones(1,11);
for i=1:10
  u(i+1)=u(i)+0.1*u(i)*u(i);
end
```

12. Enhetscirkeln, $x^2 + y^2 \leq 1$, roteras runt linjen $y = 5 - x$ och bildar en torus. Bestäm dess volymen. (5p)

Lösn. Radien är 1 så genomskärningsarean är π. Centroiden färdas $2\pi\sqrt{50}$ så volymen ges av $V = 2\sqrt{50}\pi^2$.

13. Formulera och bevisa satsen som säger att en högre ordningens ODE kan skrivas som ett system av första ordningen. (5p)

Lösn. Se sats 5.1 i Blå boken.

14. Skriv som system av första ordningen och genomför en iteration med bakåt Euler metoden för differentialekvationen $u''(x)+u'(x) = 1+x$, $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$, med steglängd $h = 0.1$. (5p)

Lösn. Låt $u = u$ och $v = u'$. Vi får,

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ 1 + x - v \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Med $x_n = nh$, $n = 0, 1, \ldots$, ges Bakåt Euler lösningen av:

$$\begin{bmatrix} u^{n+1} - u^n \\ v^{n+1} - v^n \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} v^{n+1} \\ 1 + x_{n+1} - v^{n+1} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vi får $u^1 = 1 + 0.1v^1$ och $v^1 = 0.1(1.1 - v^1)$ vilket ger $v^1 = 0.1$ och därmed $u^1 = 1.01$.

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Axel Målqvist
Telefonvakt: Barbara Schnitzer, tel. 031–7725325

TMV151
2019–08–19 kl. 08.30–12.30 (SB)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

TMV151 Matematisk analys i en variabel M

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	Svar	Poäng
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		