$\boxed{F05}$

* Area

* Båglängd

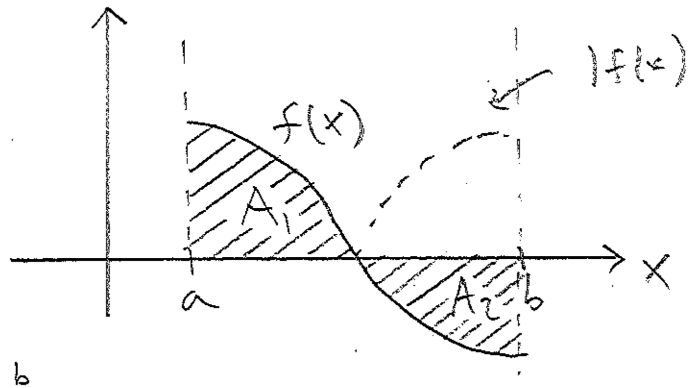
* Volym

* Rotationskroppar

Kap 2.3 - 2.4

2.3 Båglängd area och volym

Areabestämning



$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2$$

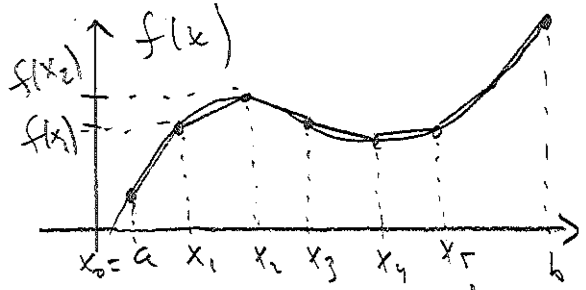
$$\int_a^b |f(x)|\,dx = A_1 + A_2$$

Exempel: Bestäm arean mellan $f(x) = \cos(x)$ och x-axeln mellan $x=0$ och $x = \frac{3\pi}{2}$.

$$A = \int_0^{3\pi/2} |\cos(x)|\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos(x)\,dx - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos(x)\,dx$$

$$= \Big[\sin(x)\Big]_0^{\pi/2} - \Big[\sin(x)\Big]_{\pi/2}^{3\pi/2} = 1 - (-1-1) = 3$$

Båglängden är längden av en kurva i planet.



Vi delar in intervallet och approximerar med linjesegment.

Sats 2.4 Båglängd

Låt f vara kontinuerligt deriverbar på $[a,b]$. Funktionens graf $G = \{(x,y) : y = f(x), x \in [a,b]\}$ är en kurva i planet vars längd ges av

$$L = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

Bevis:

Vi delar in $[a,b]$ i n delintervall $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Längden av linjesegmenten mellan $(x_i, f(x_i))$, $i = 1,\ldots,n$ ges av

$$L_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

$$= \sum_{i=1}^n \Delta x_i \sqrt{1 + \frac{(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}{(x_i - x_{i-1})^2}}$$

Medelvärdessatsen för derivator ger att det finns $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ sådant att

$$\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(c_i).$$

Alltså

$$L_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{1+f'(c_i)^2}\,\Delta x_i$$

vilket är en Riemann-summa av den kontinuerliga funktionen $\sqrt{1+f'(x)^2}$.

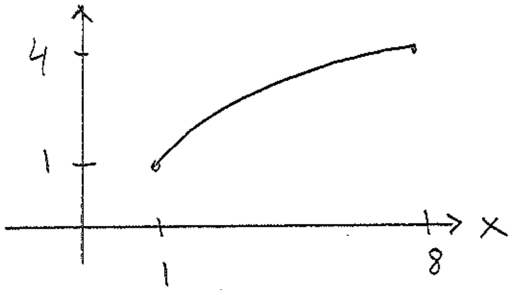
Vi låter $n \to \infty$ så att $\Delta x \to 0$

och får $L = \lim_{n\to\infty} L_n = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\, dx$

Notera att $L_n \leq L$ eftersom

Linjesegmentet är kortaste sträckan mellan två punkter.

Exempel: Låt $f(x) = x^{2/3}$ bestäm kurvans längd mellan $x=1$, $x=8$.



$f'(x) = \frac{2}{3} x^{-1/3}$ är kontinuerlig på intervallet

$$L = \int_1^8 \sqrt{1+\frac{4}{9}x^{-2/3}}\, dx = \int_1^8 \sqrt{\frac{9x^{2/3}+4}{9x^{2/3}}}\, dx$$

$$= \int_1^8 \frac{\sqrt{9x^{2/3}+4}}{3x^{1/3}}\, dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 9x^{2/3}+4 \\ du = 6x^{-1/3}dx \\ u(8)=40,\ u(1)=13 \end{array} \right\} =$$

$$= \int_{13}^{40} u^{1/2} \cdot \frac{1}{3\cdot 6}\, du = \frac{1}{18} \cdot \frac{2}{3}\left[u^{3/2}\right]_{13}^{40} =$$

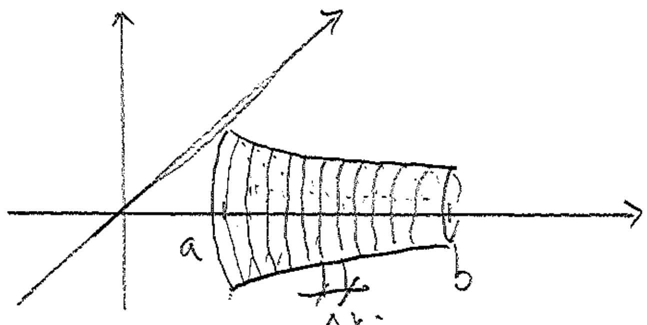
$$= \frac{40\sqrt{40} - 13\sqrt{13}}{27}.$$

Sats 2.5 (Volym som integral av area)

Låt S vara en kropp i $\mathbb{R}^3$ definierad mellan $x=a$ och $x=b$, $-\infty<a<b<\infty$. Anta att tvärsnittet av S vid x ges av den kontinuerliga funktionen $A(x)$. Då ges volymen av $V = \int_a^b A(x)\,dx$

Bevis: Låt $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ vara partition av $[a,b]$ i n delintervall, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Vi approximerar volymen med parallella skivor



Volymen av varje skiva ΔV_i kommer ligga mellan $\min\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} A(x)\Delta x_i \leq \Delta V_i \leq \max\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} A(x)\Delta x_i$

Summerar vi över $i=1,\dots,n$ får vi

$$I_{min}(A,P)=\sum_{i=1}^{n}\min_{x\in[x_{i-1},x_i]} A(x)\Delta x_i \leq V \leq \sum_{i=1}^{n}\max_{x\in[x_{i-1},x_i]} A(x)\Delta x_i = I_{max}(A,P)$$

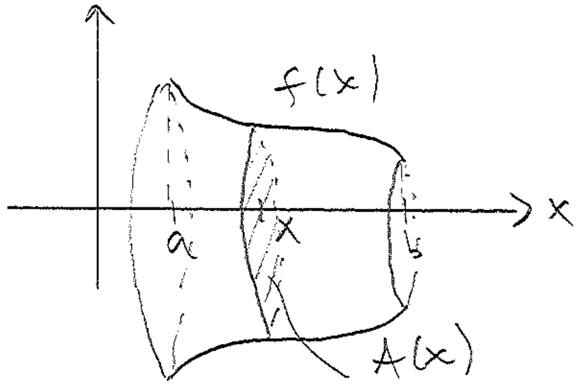
Eftersom A är kontinuerlig konvergerar alla Riemann-summor (Sats 1.2) och därför får vi

$$V=\int_a^b A(x)\,dx \quad \blacksquare$$

2.4 Rotationskroppar

En rotationskropp konstrueras genom att ett område i planet roterar runt en linje.

Vi börjar med rotationen runt x-axeln.



Låt $f(x)$ mellan $x=a$ och $x=b$ rotera runt x-axeln.

Tvärsnittsarean ges av $A(x)=\pi f(x)^2$

Sats 2.5 ger $V=\int_a^b \pi f(x)^2\,dx$

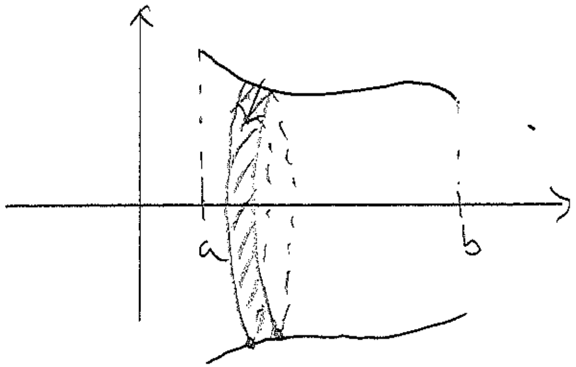
__Exempel__: Volymen av oändlig kropp

Låt $f(x) = \frac{1}{x}$ rotera runt x-axeln mellan $x=1$ och $x=\infty$. Bestäm volymen.

$$V = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \pi\left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \lim_{R\to\infty} \pi\left[-\frac{1}{x}\right]_1^R = \pi.$$

__Exempel__: Rotation av yta runt x-axeln

Låt S vara ytan som bildas då f roterar runt x-axeln mellan $x=a$ och $x=b$. Bestäm ytans area.

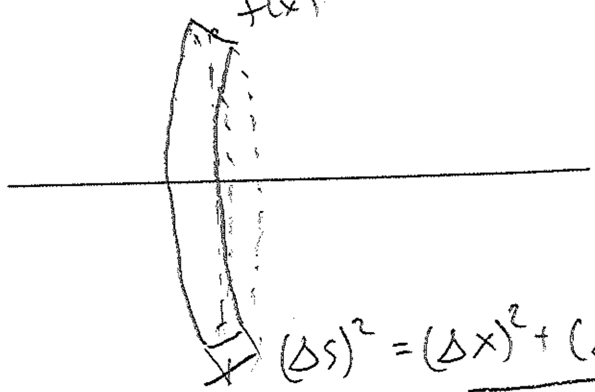


Vi kommer ihåg att längden av kurvan ges av $L = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$

Arean ges av linjesegmentens längd $\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$ gånger omkretsen $2\pi|f(c_i)|$, i en mellanliggande punkt $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ enligt satsen om mellanliggande värden.

I gräns får vi

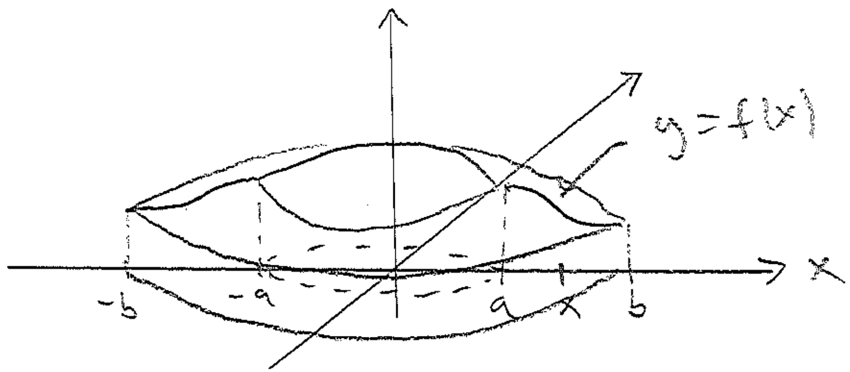
$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$



$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta f)^2$$

$$\Delta s = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x.$$

Rotation kring y-axeln

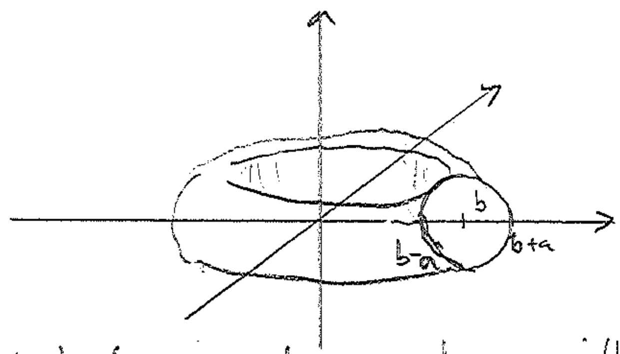


Vi låter $y=f(x)$ mellan $x=a$ och $x=b$ rotera runt y-axeln.

I punkten x är volymen av det roterande segmentet

$\Delta V = f(x)\Delta x \cdot 2\pi x$. I gräns får vi då $V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx$

Exempel: (Volymen av en torus)



En cirkel med centrum i $(b,0)$ och radie a roterar runt y-axeln. Bestäm volymen. $(x-b)^2+y^2=a^2 \Rightarrow f(x)=\sqrt{a^2-(x-b)^2}$

$$V = 2\cdot 2\pi \int_{b-a}^{b+a} x\sqrt{a^2-(x-b)^2}\,dx = \left\{\begin{matrix} u=x-b \\ du=dx \end{matrix}\right\} =$$

(annars bara halva)

$$= 4\pi \int_{-a}^{a} (u+b)\sqrt{a^2-u^2}\,du =$$

$$= 4\pi \int_{-a}^{a} u\sqrt{a^2-u^2}\,du + 4\pi b \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-u^2}\,du$$

halv-cirkel

$$= \underset{\text{udda}}{0} + 4\pi b \frac{\pi a^2}{2} = 2\pi^2 a^2 b$$