

$$\begin{aligned}
 &= - \int_t^0 f(\bar{t}) g(t-\bar{t}) d\bar{t} = \int_0^t f(u) g(t-u) du \\
 &= (g * f)(t).
 \end{aligned}$$

Sats 4.8

Låt $|f(t)|, |g(t)| \leq Ce^{at}$ ha

Laplace transformerna $F(s)$ och $G(s)$

Då gäller för $h(t) = (f * g)(t)$ att

$$H(s) = F(s) \cdot G(s).$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \int_0^\infty e^{-st} h(t) dt = \\
 &= \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t f(u) g(t-u) du dt =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(u) g(t-u) du dt = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Byt integrationsordning} \\ \uparrow u \end{array} \right\} =
 \end{aligned}$$


$$\begin{aligned}
 &= \int_0^\infty \int_u^\infty e^{-st} f(u) g(t-u) dt du = \\
 &= \left\{ \bar{t} = t-u \right\} = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s\bar{t}} e^{-su} f(u) g(\bar{t}) d\bar{t} du = \\
 &= \int_0^\infty e^{-s\bar{t}} g(\bar{t}) d\bar{t} \cdot \int_0^\infty e^{-su} f(u) du = \\
 &= G(s) \cdot F(s)
 \end{aligned}$$

Ex: Bestäm $h(t)$ givet $H(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+1}$

Låt $F(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow f(t) = 1$, $G(s) = \frac{1}{s+1} \Rightarrow$

$g(t) = e^{-t}$. Sats 4.8 ger

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)du =$$

$$= \int_0^t e^{-u} du = \left[-e^{-u} \right]_0^t = 1 - e^{-t}.$$

4.5 Impulser och diskontinuerliga funktioner

Definition: Heavisides stegfunktion

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

Eftersom $\theta(t) = 1, t > 0$ gäller att

$\mathcal{L}(\theta(t))(s) = \frac{1}{s}$ eftersom punktvalet i 0 inte påverkar integralen.

Sats 4.9 Fördjning

Låt $f(t)$ ha Laplacetransform $F(s)$ och $\theta(t)$ vara Heavisides stegfunktion

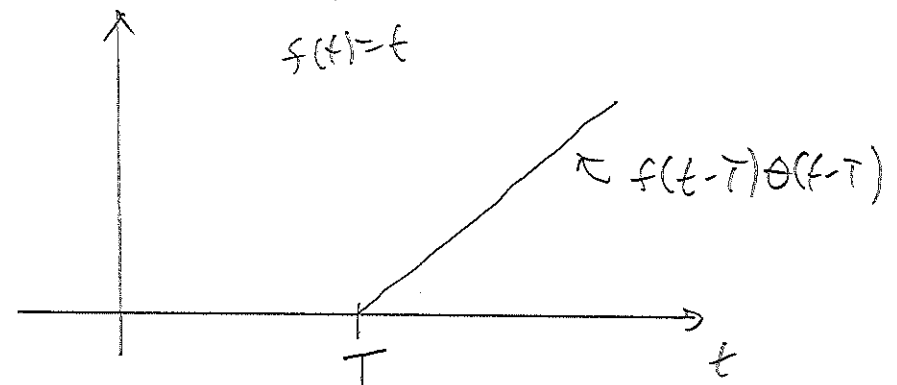
Då gäller $\mathcal{L}(f(t-T)\theta(t-T))(s) = e^{-sT}F(s)$.

Bevis:

Vi har $\mathcal{L}(f(t-T)\theta(t-T))(s) =$

$$= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t-T)\theta(t-T) dt = \int_T^{\infty} e^{-st} f(t-T) dt =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \tau = t-T \\ d\tau = dt \end{matrix} \right\} = \int_0^{\infty} e^{-s(\tau+T)} f(\tau) d\tau = e^{-sT} F(s)$$



Ex: En spänning E slås på vid tiden $t=1$, och att $\delta_\varepsilon(t) = 0$, $t \neq 0$ då $\varepsilon \rightarrow 0$.

bestäm spänningens Laplace transform.

$$\mathcal{L}(E\theta(t-1))(s) = E e^{-s} \cdot \frac{1}{s} \text{ eftersom}$$

$\theta(t)$ har Laplace transform $\frac{1}{s}$.

* Impuls

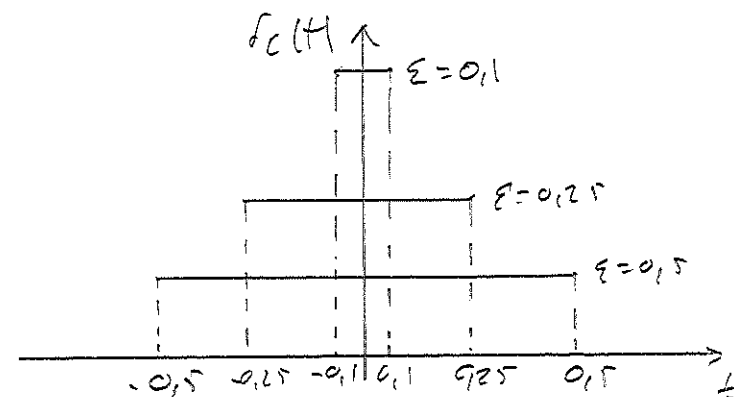
En kraft som verkar med stor styrka under kort tid kallas impuls.

Låt $\delta_\varepsilon(t)$ definieras av

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & t \leq -\varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon} & -\varepsilon < t < \varepsilon \\ 0 & t \geq \varepsilon \end{cases}$$

För något $\varepsilon > 0$.

$$\text{Vi ser att } \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t) dt = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$$



Definition: (Diracs delta)

Diracs delta är en idealiserad enhetspuls i $t=0$ sådan att $\delta(t) = 0$ $t \neq 0$ och

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t) = \delta(t)$$

En enhetspuls i $t=t_0$ ges av $\delta(t-t_0)$.
Följande egenskaper gäller för $\delta(t, \text{kont})$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \delta(t-t_0) f(t) dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \delta_\varepsilon(t-t_0) f(t) dt = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-t_0-\varepsilon}^{-t_0+\varepsilon} f(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(t_0 + \varepsilon) = f(t_0) \end{aligned}$$

Sats 4.10

Vi har att $\mathcal{L}(\delta(t-t_0))(s) = e^{-st_0}$, $t_0 \geq 0$

Speciellt $\mathcal{L}(\delta(t))(s) = 1$.

Beris: Antag först $t_0 > 0$, $\varepsilon < t_0$. Vi

$$\text{har } \mathcal{L}(\delta(t-t_0))(s) = \int_0^{\infty} \delta(t-t_0) e^{-st} dt =$$

$$= e^{-st_0}. \text{ Vi låter nu } t_0 \rightarrow 0$$

$$\text{vilket ger } \mathcal{L}(\delta(t))(s) = \lim_{t_0 \rightarrow 0} e^{-st_0} = 1.$$

4.6 Lösning av ODE med Laplacetransform

Vi har fyra steg:

- 1) Laplace transform ekvationen
- 2) Sätt in begynnelsevärden
- 3) Lös den algebraiska ekvationen
- 4) Laplace transform tillbaka

Sats 4.11

Tabell för att beräkna invers
L-transform

$$\mathcal{L}(\delta(t))(s) = 1$$

$$\mathcal{L}(\theta(t))(s) = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}(t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}(e^{-at})(s) = \frac{1}{s+a}$$

$$\mathcal{L}(t^n e^{-at})(s) = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}} \text{ (exponentiell skalning)}$$

$$\mathcal{L}(\cos at)(s) = \frac{s}{s^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}(\sin at)(s) = \frac{a}{s^2+a^2}$$

Beris: Alla ekv. de här sista är redan gjorda. Vi gör $\cos at$

$$\mathcal{L}(\cos at)(s) = \mathcal{L}\left(\frac{e^{iat} + e^{-iat}}{2}\right)(s) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-ia} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+ia} = \frac{1}{2} \frac{s+ia + s-ia}{(s-ia)(s+ia)}$$

$$= \frac{s}{s^2+a^2}$$

□

Ex: $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = e^{-t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Laplace transform ger

$$s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) + 2s Y(s) - 2y(0) + Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$\Rightarrow (s^2 + 2s + 1) Y(s) = \frac{1}{s+1} + 1 \quad \text{eller}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^3} + \frac{1}{(s+1)^2} \quad \text{vilket ger}$$

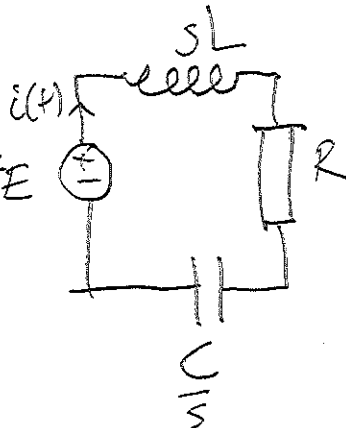
$$y(t) = \frac{1}{2} t^2 e^{-t} + t e^{-t} \quad \text{enligt tabell.}$$

Ex: Elektrisk krets

$$L i'(t) + R i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(u) du = E(t) = e^{-2t} E$$

(åt $L=1$, $R=4$, $C=\frac{1}{3}$, $i(0)=0$)

$$s I(s) + 4 I(s) + 3 \frac{1}{s} I(s) = \frac{1}{s+2}$$



Ellersom $s^2 + 4s + 3 = (s+1)(s+3)$ för ii

$$I(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

Liknämningt ger $s = A(s+2)(s+3) + B(s+1)(s+3) + C(s+1)(s+2)$

$$\begin{cases} s^2: 0 = A + B + C \\ 1: 1 = 5A + 4B + 3C \\ 0: 0 = 6A + 5B + 2C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 2A + B \\ 0 = 4A + B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = 2 \\ C = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$I(s) = -\frac{1}{2} \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+2} - \frac{3}{2} \frac{1}{s+3} \quad \text{vilket ger}$$

$$i(t) = -\frac{1}{2} e^{-t} + 2 e^{-2t} - \frac{3}{2} e^{-3t}$$

Sammanfattning:

Sats 4.1 och 4.5

↑ väl det 2 derivator

* Det är L-transform

* Skrivning

* Förföring

* Lös ODE med L-transform