

F15

* Numeriska metoder
för att lösa ODE

* Konvergensanalys

Kap 6.1 - 6.2

6.1 Numeriska metoder för ODE

$$\text{Låt } \begin{cases} \dot{u}(t) = f(t, u(t)), & t_0 < t < T, \\ u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

där $\dot{u}(t) := \frac{d}{dt}u(t)$ är Newtons notation för tidsderivata.

Vi delar in intervallet $[t_0, T]$ i n delintervall av längd k_i $i = 1, \dots, n$ och introducerar $t_i = t_{i-1} + k_i$ $i = 1, \dots, n$. Vi integrerar ekvationen över $[t_{i-1}, t_i]$.

$$(**) u(t_i) - u(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t, u(t)) dt, \quad i = 1, \dots, n$$

Eftersom $u(t)$ inte är känd approximerar vi integralen. Olika approximationer ger olika numeriska metoder. Först evaluerar vi integralen i vänstra punkten t_{i-1} . Låt approximationen ges av $u(t_i) \approx u_i$. Vi får

$$u_i - u_{i-1} = k_i \cdot f(t_{i-1}, u_{i-1})$$

eller $\frac{u_i - u_{i-1}}{k_i} = f(t_{i-1}, u_{i-1})$ där vänsterledet kallas differenskvot. Detta är Eulers metod.

Definition 6.1 Eulers metod

Låt $t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ vara en partition av $[t_0, T]$ i n delintervall av längd $k_i = t_i - t_{i-1}$, $i=1, \dots, n$. Eulers metod för att approximerar u ges av

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{k_i} = f(t_{i-1}, u_{i-1}), \quad i=1, \dots, n.$$

Givet t_i, t_{i-1} och u_{i-1} kan vi direkt bestämma u_i . Denna typ av metod kallas explicit. Notera att k_i kallas steglängd.

Om vi istället evaluerar
 (***) i högra punkten t_i får vi

$$u(t_i) - u(t_{i-1}) \approx k_i f(t_i, u_i).$$

Motsvarande numeriska metod kallas
 bakåt Euler.

Definition 6.2 (Bakåt Euler)

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{k_i} = f(t_i, u_i), \quad i = 1, \dots, n$$

Exempel: (Bakåt Euler)

$$u'(t) = \sin(u(t)), \quad u(0) = 1$$

Vi får med $t_i = \frac{i\pi}{10}$, $i = 0, \dots, 10$

$$u_i = u_{i-1} + k_i \sin(u_i), \quad u_0 = 1.$$

Här krävs ekvationslösning för att
 bestämma u_i . En sådan metod
 kallas implicit. Låt $x = u_i$.

Vi har $x = u_{i-1} + k_i \sin x =: g(x)$
 alltså på fixpunktsform, vidare
 gäller $|g'(x)| = |k_i \cos x| \leq k_i < 1$
 För små steglängder. Banach ger
 konvergens av $x_n = g(x_{n-1})$ då
 $n \rightarrow \infty$. Detta värde definierar
 $u_i = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Exempel: (Eulers metod)

$$u'(t) = t - u(t), u(0) = 1$$

Lös för $t \in [0, 1]$ med steglängd

$$h = 0,2. \text{ Vi har } t_j = \frac{j}{5}, j = 0, 1, \dots, 5$$

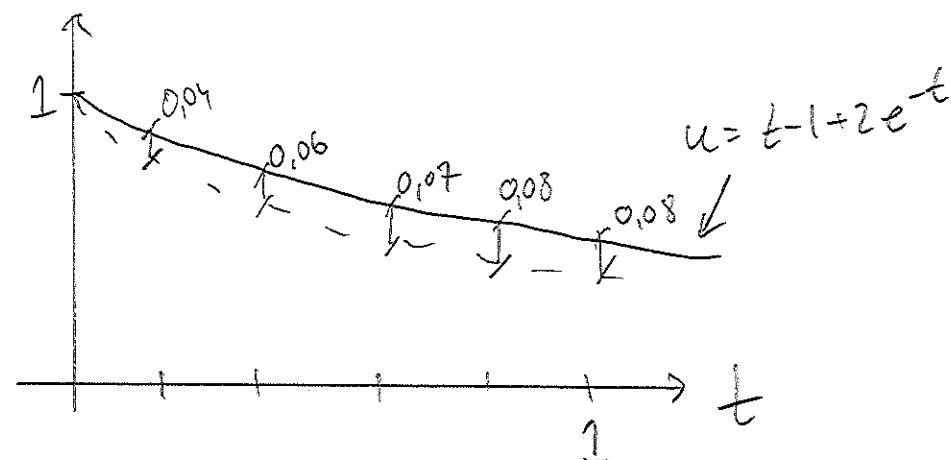
$$h = \frac{1}{5}.$$

$$u_i = u_{i-1} + \frac{1}{5}(t_{i-1} - u_{i-1}).$$

$$\begin{aligned} i=0 \Rightarrow u_1 &= u_0 + \frac{1}{5}(0 - u_0) = \\ &= \frac{4}{5}u_0 = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5} - u_1\right) = \frac{1}{25} + \frac{4}{5}u_1 \\ &= \frac{1}{25} + \frac{16}{25} = \frac{17}{25} \end{aligned}$$

$$u_3 = u_2 + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{5} - u_2\right) = \frac{2}{25} + \frac{4}{5} \cdot \frac{17}{25} = \frac{78}{125}$$



Så slutligen har vi mittpunktsmetoden

Definition 6.3 (Mittpunktsmetoden)

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{t_i} = f\left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2}, \frac{u_i + u_{i-1}}{2}\right),$$

$$i = 1, \dots, n$$

Mittpunktsmetoden är implicit

som bakåt Euler.

6.2 KonvergensSats 6.1 (Konvergens av Eulers metod)

Låt $u(t)$ lösa för $t \geq t_0$

$$u' = f(t, u), \quad u(t_0) = u_0,$$

Låt vidare f vara globalt

Lipschitz-kontinuerlig i u med

$$\text{konstant } L \text{ och } \max_{t \in [t_0, T]} \left| \frac{d^2 u}{dt^2} \right| \leq M.$$

Euler approximationen med konstant steglängd k uppfyller då

$$|u(t_n) - u_n| \leq \frac{Mk}{2L} (e^{L(t_n - t_0)} - 1)$$

Beris: Låt $e_i = u(t_i) - u_i$ vara felet på $[t_{i-1}, t_i]$. Taylorutveckling kring $u(t_{i-1})$ ger

$$u(t_i) = u(t_{i-1}) + k u'(t_{i-1}) + \frac{k^2}{2} u''(\eta_i),$$

$$\eta_i \in [t_{i-1}, t_i]. \text{ Vi har } u'(t_{i-1}) = f(t_{i-1}, u(t_{i-1}))$$

$$\Rightarrow u(t_i) = u(t_{i-1}) + k f(t_{i-1}, u(t_{i-1})) + \frac{k^2}{2} u''(\eta_i)$$

$$\text{Eulers metod ger } u_i = u_{i-1} + k f(t_{i-1}, u_{i-1})$$

$$\Rightarrow e_i = e_{i-1} + k (f(t_{i-1}, u(t_{i-1})) - f(t_{i-1}, u_{i-1})) + \frac{k^2}{2} u''(\eta_i)$$

Eftersom f är L -kont

$$\begin{aligned} |e_i| &\leq |e_{i-1}| + k L |e_{i-1}| + \frac{k^2}{2} M = \\ &= (1 + kL) |e_{i-1}| + \frac{k^2 M}{2} \end{aligned}$$

Vi använder denna relation upprepade gånger.

$$|e_n| \leq |1+kL| |e_{n-1}| + \frac{k^2 M}{2}$$

$$\leq (1+kL)^2 |e_{n-2}| + (1+kL) \frac{k^2 M}{2} + \frac{k^2 M}{2}$$

$$\leq \dots \leq (1+kL)^n |e_0| + \frac{k^2 M}{2} (1 + (1+kL) + \dots + (1+kL)^{n-1})$$

$$= \frac{k^2 M}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (1+kL)^i = \frac{k^2 M}{2} \frac{(1+kL)^n - 1}{kL}$$

$$= \frac{kM}{2L} ((1+kL)^n - 1). \text{ Vi har}$$

$$1+x \leq e^x \text{ eller } 1+kL \leq e^{kL} \text{ och}$$

$$(1+kL)^n \leq e^{knL} = e^{L(t_n - t_0)}$$

$$\therefore |e_n| \leq \frac{kM}{2L} (e^{L(t_n - t_0)} - 1)$$

Liknande bevis gäller för bakåt Euler och mittpunkt.

Definition: (Konvergensordning)

En numerisk metod med konstant steglängd k är av ordning n om felet är proportionellt mot k^n .

Eulers metod och bakåt Euler är 1:a ordningens metoder medan

Mittpunktsmetoden är 2:a ordningen.