Matematik Chalmers

Tentamen i TMV155 Inledande matematik M, 2007–10–25, f M

Telefon: Fredrik Lindgren, 0762–721860
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje uppgift är värd 10 poäng, totalt 50 poäng. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost.

---

1. (a) Använd Gauss metod för att bestämma för vilka värden på a följande ekvationssystem har unik lösning.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 &= 1 \end{aligned}$$

(b) Bestäm ett heltal N sådant att $j \geq N \Longrightarrow (\frac{1}{2})^j \leq 10^{-6}$.

2. Låt $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{c} = (1, -1, 1)$.

(a) Beräkna vektorprojektionen av $\mathbf{b}$ på $\mathbf{a}$. Bestäm sedan vektorer $\mathbf{w}$ och $\mathbf{z}$ sådana att $\mathbf{b} = \mathbf{w} + \mathbf{z}$ och $\mathbf{w}$ är parallell med $\mathbf{a}$ och $\mathbf{z}$ är ortogonal mot $\mathbf{a}$ (ortogonal uppdelning av $\mathbf{b}$).

(b) Skriv en MATLAB-funktion som beräknar vektorprojektionen av en vektor $\mathbf{u}$ på en vektor $\mathbf{v}$. Ange sedan hur man använder denna för att lösa uppgift (a).

(c) Beräkna volymen av den parallellepiped som spänns upp av $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

3. Låt funktionen g definieras av

$$\begin{cases} g : [0, \infty) \to \mathbf{R} \\ g(x) = \dfrac{2}{2+x} \end{cases} \tag{1}$$

(a) Bestäm en Lipschitz-konstant för g (på det angivna intervallet).

(b) Visa att funktionen g i (1) uppfyller antagandena i fixpunktsatsen. Beräkna även fixpunkten genom att lösa fixpunktsekvationen för hand.

(c) Beskriv hur man beräknar fixpunkten med det program `fixpoint.m` som du har skrivit. Du behöver inte skriva ned själva programmet `fixpoint.m` utan bara kommandoraden samt den funktionsfil som behövs.

4. (a) Bestäm Taylors polynom av grad 2 i punkten $a = 0$ för funktionen $\ln(1 + x)$. Bestäm även resttermen.

(b) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x + 2\sqrt{x}}{1 - x}.$$

(c) Visa att funktionen g i (1) (uppgift 3) är inverterbar (ett-ett). Bestäm inversa funktionen g^{-1}. Ange dess definitionsmängd och värdemängd.

5. (a) Formulera medelvärdessatsen.

(b) Använd denna för att bevisa att $f'(x) = 0$ för alla $x \in I$ medför att f är konstant på I.

`/stig`

TMV155 Inledande matematik M, 2007–10–25, f M. Lösningar.

---

1. (a) Gauss elimination ger

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1 \end{array}\right]$$

Vi har unik lösning om och endast om $a \neq 1$.
(b) Vi löser ut j ur olikheten $(\frac{1}{2})^j \leq 10^{-6}$. Vi får

$$\begin{aligned} -j\ln(2) &= j\ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq -6\ln(10) \\ j &\geq \frac{-6\ln(10)}{-\ln(2)} = \frac{6\ln(10)}{\ln(2)} \end{aligned}$$

Vi tar $N = \lceil \frac{6\ln(10)}{\ln(2)} \rceil$.
Alternativt: $2^{10} = 1024 > 10^3 \Rightarrow 2^{20} > 10^6 \Rightarrow 2^{-20} < 10^{-6}$, dvs $N = 20$.

2. (a)

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a} = \frac{6}{3}(1,1,1) = (2,2,2) \\ \mathbf{z} &= \mathbf{b} - \mathbf{w} = (1,2,3) - (2,2,2) = (-1,0,1) \end{aligned}$$

(b) Vi skriver filen `vprojection.m`:

```
function w=vprojection(u,v)
% Vector projection of the vector u along the vector v.
%
% Syntax: w=vprojection(u,v)
%
% Input:   u,v - two 1x3 vectors
% Output:  w   - a vector

vhat=v/norm(v);
s=prick(u,vhat)*vhat;
```

På kommandoraden skriver man sedan:

```
>>  a=[1 1 1],  b=[1 2 3]
>>  w=vprojection(b,a),  z=b-w
```

(c) Volymen är absolutbeloppet av trippelprodukten: $|\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$.

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (1,-2,1)$$

$$V = |\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |(1,-1,1)\cdot(1,-2,1)| = 4.$$

3. (a) Med definitionen av Lipschitzkonstant:

$$\begin{aligned}|g(x)-g(y)| &= \Big|\frac{2}{2+x}-\frac{2}{2+y}\Big| = \Big|2\frac{(2+y)-(2+x)}{(2+x)(2+y)}\Big| = \Big|\frac{2(y-x)}{(2+x)(2+y)}\Big| \\ &= \frac{2}{(2+x)(2+y)}|y-x| \le \frac{2}{2\cdot 2}|x-y| = \frac{1}{2}|x-y|, \quad \text{för } x,y\in[0,\infty).\end{aligned}$$

Vi får $L_g = 1/2$.
Eller med derivata:

$$|g'(x)| = \Big|\frac{-2}{(2+x)^2}\Big| = \frac{2}{(2+x)^2} \le \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \forall x\in[0,\infty).$$

Vi får $L_g = 1/2$.
(b) Vi kontrollerar antagandena i fixpunktsatsen: (1) $g: I \to I$ med $i = [0,\infty)$. Detta är klart ty värdemängden $R(g) = (0,1] \subset I$. (2) g är kontraktion ty $L_g = 1/2 < 1$. Då finns unik fixpunkt $\bar{x} \in I$ enligt satsen.
Fixpunkten fås genom att lösa ekvationen $x = g(x)$ dvs $x = \frac{2}{2+x}$ eller $x^2+2x-2=0$. Vi får $x = -1\pm\sqrt{3}$. Endast den positiva roten ligger i I. Alltså $\bar{x} = -1+\sqrt{3}$.
(c) Vi skriver filen `funk.m`:

```
function y=funk(x)
  y=2/(2+x);
```

På kommandoraden skriver man sedan:

```
>>  x=fixpoint(@funk,1,1e-6)
```

4. (a) $P_2(x) = x - \frac{1}{2}x^2$, $R(x) = \frac{2}{(1+s)^3}\frac{x^3}{6}$
(b)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{3+2/\sqrt{x}}{1/x-1} = -3.$$

(c) Funktionen g är inverterbar om den är strängt monoton. Derivatan är

$$g'(x) = \frac{-2}{(2+x)^2} < 0 \quad \forall x\in[0,\infty),$$

vilket medför att g är strängt avtagande. Enligt satsen om mellanliggande värden har då ekvationen $g(x) = y$ en unik lösning x för alla $y \in R(g)$. Detta är inversen: $x = g^{-1}(y)$.
Vi löser ekvationen $g(x) = y$ för hand:

$$\frac{2}{2+x} = y, \quad x = \frac{2-2y}{y} = g^{-1}(y).$$

Alltså: $g^{-1}(x) = \frac{2-2x}{x}$. Definitionsmängd: $D_{g^{-1}} = (0,1]$. Värdemängd: $R_{g^{-1}} = [0,\infty)$.

5. Se Adams.

`/stig`