Matematik Chalmers

Tentamen i TMV175 Inledande matematik TD, 2007–10–26, f M

Telefon: Aron Lagerberg, 0762–721860
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje uppgift är värd 10 poäng, totalt 50 poäng. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost.

---

1. (a) Använd Gauss metod för att bestämma a så att följande ekvationssystem har mer än en lösning.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + ax_3 &= 0 \end{aligned}$$

(b) Bestäm ett heltal N sådant att $i, j \geq N \Longrightarrow \left| \dfrac{1}{i^2} - \dfrac{1}{j^2} \right| \leq 10^{-6}$.

2. Beräkna avståndet mellan linjen

$$\begin{aligned} x &= 1 + 3t, \\ y &= 2, \\ z &= 3 + 4t, \end{aligned}$$

och punkten $P_0 = (2, 5, 6)$. Beräkningen görs enligt deluppgifterna (a) och (b):

(a) Tag ut en punkt P på linjen och beräkna först vektorprojektionen av vektorn PP_0 på linjens riktningsvektor.

(b) Beräkna sedan avståndet.

(c) Bestäm ekvationen för det plan som innehåller den ovan nämnda linjen och linjen

$$x - 1 = y - 2 = z - 3.$$

3. (a) Beskriv hur man härleder Newtons metod med hjälp av linjärisering.

(b) Hur många reella rötter har ekvationen $x^3 + 4x - 1 = 0$? Tips: Använd Bolzanos sats.

(c) Skriv ned en iteration av Newtons metod för ekvationen $x^3 + 4x - 1 = 0$ med startpunkt $x_0 = 1$.

(d) Beskriv hur man löser $x^3 + 4x - 1 = 0$ med det program `newton.m` som du har skrivit. Du behöver inte skriva ned själva programmet `newton.m` utan bara kommandoraden samt den funktionsfil som behövs.

4. (a) Redogör för definitionen av gränsvärde $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

(b) Beräkna en Lipschitz-konstant för funktionen $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ på intervallet $[1, 2]$.

(c) Bestäm Taylors polynom av grad 3 i punkten $a = 0$ för $\sin(x)$. Ange resttermen.

(d) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 + x - 12}{x - 3}.$$

5. (a) Formulera fixpunktsatsen.

(b) Använd medelvärdessatsen för att bevisa att $f'(x) > 0$ för alla $x \in I$ medför att f är strängt monoton på I.

`/stig`

TMV175 Inledande matematik TD, 2007–10–26, f M. Lösningar.

---

1. (a) Gauss elimination ger

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 \end{array}\right]$$

Vi har mer än en lösning om och endast om $a = 1$.

(b) Antag $j \geq i$. Då gäller

$$\left|\frac{1}{i^2} - \frac{1}{j^2}\right| = \frac{1}{i^2} - \frac{1}{j^2} \leq \frac{1}{i^2}.$$

Vi löser ut i ur olikheten $\frac{1}{i^2} \leq 10^{-6}$. Vi får $i \geq 10^3$. Vi tar $N = 10^3$.

2. (a) I linjens ekvation ser vi att $P = (1, 2, 3)$ är en punkt på linjen och $\mathbf{v} = (3, 0, 4)$ är en riktningsvektor. Låt $P_0 = (2, 5, 6)$ vara den givna punkten. Vi beräknar vektorprojektionen av vektorn $\mathbf{a} = PP_0 = (1, 3, 3)$ på vektorn $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\,\mathbf{v} = \frac{(1,3,3)\cdot(3,0,4)}{25}(3,0,4) = \frac{15}{25}(3,0,4) = \frac{3}{5}(3,0,4) = (\tfrac{9}{5}, 0, \tfrac{12}{5}).$$

(b) Det sökta avståndet är längden av vektorn $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$:

$$|\mathbf{c}| = |(1,3,3) - (\tfrac{9}{5}, 0, \tfrac{12}{5})| = |(\tfrac{-4}{5}, 3, \tfrac{3}{5})| = \tfrac{1}{5}|(-4, 15, 3)|$$
$$= \tfrac{1}{5}\sqrt{16 + 225 + 9} = \tfrac{1}{5}\sqrt{250} = \sqrt{\frac{250}{25}} = \sqrt{10}.$$

(Adams sid 550 och 565.)

(c) En normalvektor ges av $(3, 0, 4) \times (1, 1, 1) = (-4, 1, 3)$. Planets ekvation blir

$$(x-1, y-2, z-3)\cdot(-4,1,3) = 0$$
$$-4(x-1) + (y-2) + 3(z-3) = 0$$
$$-4x + y + 3z = 7$$

3. (a) Om x_k är en approximativ lösning så linjäriserar vi kring x_k: $L(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$. Vi löser $L(x) = 0$, vi får $x = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$. Det får bli nästa approximation, dvs $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$.

(b) Vi har $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 4 > 0$. Bolzano ger minst en rot i intervallet $[0, 1]$. Derivatan är $f'(x) = 3x^2 + 4 > 0$ så att f är strängt monoton för alla x. Alltså finns det endast en rot.

(c)

beräkna residualen: $b = -f(1) = -4$

beräkna derivatan: $a = f'(1) = 7$

beräkna ändringen: $h = b/a = -\dfrac{4}{7}$

uppdatera: $x = x + h = 1 - \dfrac{4}{7} = \dfrac{3}{7}$

(c) Man skriver en funktionsfil `funk.m`:

```
function y=funk(x)
y=x^3+4*x-1;
```

Sedan skriver man kommandraden:

```
>> x=newton(@funk,1,1e-6)
```

4. (a) $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ betyder att för varje $\epsilon > 0$ finns N så dant att

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad |a_n - L| \leq \epsilon.$$

(b)

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} \\ -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} &\leq \frac{1}{4}, \quad x \in [1,2] \\ |g'(x)| = |\frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}| &\leq \frac{1}{2}, \quad x \in [1,2] \end{aligned}$$

$L = \frac{1}{2}$
Alternativt:

$$|g'(x)| = \begin{cases} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}, & x \in [1, \sqrt{2}] \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{4}, & x \in [\sqrt{2}, 2] \end{cases}$$

Alltså: $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$ för $x \in [1,2]$.
(c) Se Adams.
(d)

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 + x - 12}{x - 3} = \lim_{x\to 3}(x + 4) = 7.$$

5. Se BM och Adams.

`/stig`