Matematik Chalmers

Tentamen i TMV155 Inledande matematik M, 2008–01–18, f V

Telefon: Ragnar Freij, 0762–721860
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje uppgift är värd 10 poäng, totalt 50 poäng. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost.

---

1. Använd Gauss metod för att lösa ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= -1 \\ 7x_1 - 8x_2 + 3x_3 &= -1 \end{aligned}$$

2. (a) Beräkna avståndet från punkten (1,2,3) till planet $3x = 4z + 2$.

(b) Skriv en MATLAB-funktion som beräknar skalära projektionen av en vektor **u** på en vektor **v**. Ange sedan hur man använder denna för att lösa uppgift (a).

(c) Bestäm ekvationen för planet genom punkterna $A = (-1, 2, 1)$, $B = (0, 6, 3)$ och $C = (1, 1, 4)$.

3. (a) Redogör definitionen av att en funktion är Lipschitz-kontinuerlig på ett intervall.

(b) Beräkna derivatan av $g(x) = x^4 - 2x^2$.

(c) Beräkna absoluta maximum och minimum för $f(x) = g'(x)$ på intervallet $[0, 1]$.

(d) Beräkna (med hjälp av derivata) en Lipschitz-konstant för funktionen g på intervallet $[0, 1]$.

4. (a) Redogör för definitionen av gränsvärde $\lim_{x\to a} f(x)$.

(b) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right)$.

(c) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} x \sin(1/x)$.

(d) Beräkna med Taylor-utveckling gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{1 - \cos x}$$

5. (a) Formulera fixpunktssatsen.

(b) Redogör för den del av beviset som visar att

$$|x_{k+1} - x_k| \le L^k |x_1 - x_0|$$

/stig

TMV155 Inledande matematik M, 2008–01–18, f V. Lösningar.

---

1. Gauss elimination ger

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & -1 & -1 \\ 7 & -8 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right]\begin{array}{l} -2\ -7 \\ 3 \\ \quad\ 3 \end{array} \iff \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -13 & 8 & -7 & -5 \\ 0 & -38 & 16 & -14 & -10 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ -1 \\ -0.5 \end{array}$$

$$\iff \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 13 & -8 & 7 & 5 \\ 0 & 19 & -8 & 7 & 5 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ -19 \\ 13 \end{array} \iff \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 13 & -8 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 48 & -42 & -30 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ 1/6 \end{array}$$

$$\iff \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 13 & -8 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & -7 & -5 \end{array}\right]\begin{array}{l} \quad 8 \\ 1 \\ 1\ 1 \end{array} \iff \left[\begin{array}{cccc|c} 24 & 16 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 13 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -7 & -5 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ 1/13 \\ \\ \end{array}$$

$$\iff \left[\begin{array}{cccc|c} 24 & 16 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -7 & -5 \end{array}\right]\begin{array}{l} 1 \\ -1 \\ \\ \end{array} \iff \left[\begin{array}{cccc|c} 24 & 0 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -7 & -5 \end{array}\right]\begin{array}{l} 1/3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\iff \left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -7 & -5 \end{array}\right]$$

Fri variabel: $x_4 = 8s$. Sedan fås

$$\begin{aligned} x_3 &= (-5 + 7x_4)/8 = -\frac{5}{8} + 7s \\ x_2 &= 0 \\ x_1 &= (1 - 3x_4)/8 = \frac{1}{8} - 3s. \end{aligned}$$

Vi får oändligt många lösningar:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} - 3s \\ 0 \\ -\frac{5}{8} + 7s \\ 8s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ 0 \\ -\frac{5}{8} \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

2. (a) $P_1 = (1, 2, 3)$ den givna punkten, $P_0 = (2, 10, 1)$ en punkt i planet, $\mathbf{n} = (3, 0, -4)$ en normalvektor till planet. Avståndet är absolutbeloppet av skalära projektionen av $\overline{P_0P_1}$ på $\mathbf{n}$:

$$d = \left| \frac{\mathbf{n} \cdot \overline{P_0P_1}}{|\mathbf{n}|} \right| = \frac{|(3, 0, -4) \cdot (-1, -8, 2)|}{|(3, 0, -4)|} = \frac{|-11|}{5} = \frac{11}{5}$$

(b) Vi skriver filen `sprojection.m`:

```
function s=sprojection(u,v)
% Scalar projection of the vector u along the vector v.
%
% Syntax: s=sprojection(u,v)
%
% Input:   u,v - two 1x3 vectors
% Output:  s   - a number

vhat=v/norm(v);
s=dot(u,vhat)*vhat;
```

På kommandoraden skriver man sedan:

```
>>  n=[3,0,-4]
>>  u=[1,2,3]-[2,10,1]
>>  s=sprojection(u,n),  d=abs(s)
```

(c) En normalvektor: $\mathbf{n} = \overline{AB} \times \overline{AC} = (1, 4, 2) \times (2, -1, 3) = (14, 1, -9)$. Planets ekvation blir:

$$\begin{aligned}
&\overline{PA} \cdot \mathbf{n} = 0 \\
&14(x - (-1)) + (y - 2) - 9(z - 1) = 0 \\
&14x + y - 9z + 21 = 0 \\
&14x + y - 9z = -21
\end{aligned}$$

3. (a) Funktionen g är Lipschitz-kontinuerlig på intervallet I om det finns enkonstant L sådan att

$$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in I.$$

(b) $g'(x) = 4(x^3 - x)$

(c) $f(x) = g'(x) = 4(x^3 - x)$. Kritiska punkter ges av $f'(x) = 4(3x^2 - 1) = 0$, dvs $x = \pm 1/\sqrt{3}$. Derivatan är negativ till vänster och positiv till höger om $x = 1/\sqrt{3}$. Vi har alltså lokalt minimivärde $f(1/\sqrt{3}) = -8/(3\sqrt{3})$ i $x = 1/\sqrt{3}$. I ändpunkterna av intervallet $[0, 1]$ har vi lokala maximivärden $f(0) = 0$ och $f(1) = 0$. Vi ser att absolut maximivärde är $f(0) = 0$ och absolut minimivärde är $f(1/\sqrt{3}) = -8/(3\sqrt{3})$.

(d) Enligt (c) har vi $-8/(3\sqrt{3}) \leq g'(x) \leq 0$ för $x \in [0, 1]$. Lipschitz-konstanten ges av

$$L = \max |g'(x)| = 8/(3\sqrt{3}).$$

4. (a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ betyder att för varje $\epsilon > 0$ finns δ sådant att

$$0 < |x - a| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| \leq \epsilon.$$

(b)

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x^2 - 4} \right) = \lim_{x \to 2} \left(\frac{x + 2}{(x + 2)(x - 2)} - \frac{1}{(x + 2)(x - 2)} \right) = \lim_{x \to 2} \frac{x + 1}{(x + 2)(x - 2)}$$

Gränsvärdet existerar ej. Men vi har höger och vänstergränsvärden:

$$\lim_{x \to 2+} \frac{x + 1}{(x + 2)(x - 2)} = \infty$$

$$\lim_{x \to 2-} \frac{x + 1}{(x + 2)(x - 2)} = -\infty$$

(c) $|x \sin(1/x)| \leq |x||\sin(1/x)| \leq |x| \to 0$ när $x \to 0$. Genom instängningssatsen får vi då $\lim\limits_{x \to 0} x \sin(1/x) = 0$.

(d)

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)\right) - 1 - x}{1 - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^4)\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + O(x^3)}{\frac{1}{2}x^2 + O(x^4)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + O(x)}{1 + O(x^2)} = 1$$

5. Se kompendiet.

`/stig`