Matematik Chalmers

Tentamen i TMV155 Inledande matematik M, 2008–08–27, f V

Telefon: Fredrik Lindgren, 0762–721860
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje uppgift är värd 10 poäng, totalt 50 poäng. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost.

Obs: teknologer inskrivna H06 eller tidigare gör uppgifterna på baksidan!

---

1. Använd Gauss metod för att lösa ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 11 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 9 \end{aligned}$$

2. (a) Beräkna avståndet från punkten (1,2,3) till planet $3x + y + z = 5$.

(b) Skriv en MATLAB-funktion som beräknar skalära projektionen av en vektor $\mathbf{u}$ på en vektor $\mathbf{v}$.

(c) Bestäm ekvationen för planet genom punkterna $A = (-1, 2, 1)$, $B = (0, 6, 3)$ och $C = (1, 1, 4)$.

3. (a) Bestäm linjäriseringen av $f(x) = x^2 - 4x - 1$ i punkten 4. Bestäm även linjäriseringsfelet.

(b) Skriv ned en iteration av Newtons metod för ekvationen $x^2 - 4x - 1 = 0$ med startpunkt $x_0 = 4$.

(c) Beskriv hur man löser $x^2-4x-1 = 0$ med det program `newton.m` som du har skrivit. Du behöver inte skriva ned själva programmet `newton.m` utan bara kommandoraden samt den funktionsfil som behövs.

4. Betrakta funktionen

$$g(x) = \sqrt{x}.$$

(a) Visa att g är Lipschitzkontinuerlig på intervallet $[0.01, 10]$ och bestäm en Lipschitzkonstant för g på detta intervall.

(b) Låt $a_n = \dfrac{n^2 + 5}{n^2 + 6}$. Bestäm $\lim_{n\to\infty} a_n$.

(c) Redogör för definitionen av Cauchy-följd.

5. (a) Formulera fixpunktssatsen.

(b) Redogör för den del av beviset som visar att

$$|x_{k+1} - x_k| \leq L^k |x_1 - x_0|$$

/stig

Vänd!

För teknologer inskrivna H06 eller tidigare

1. Till denna uppgift ska du endast lämna in svar, alltså utan motiveringar. (14p)

(a) Bestäm alla lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 11 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 9 \end{aligned}$$

(b) Beräkna derivatan av $g(x) = (x+1)e^{-x}$.

(c) Beräkna följande gränsvärde

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2x+1)}{x}$$

(d) Uttryck vektorn $\mathbf{a} = (2,1,1)$ som en summa $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ där $\mathbf{u}$ är parallell med vektorn $\mathbf{b} = (1,1,0)$ och $\mathbf{v}$ är ortogonal mot $\mathbf{u}$.

(e) För vilka komplexa tal gäller $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$ och $|z| = 9$.

På uppgift 2–5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. Bestäm en ekvation för det plan som innehåller linjerna $(x,y,z) = (1,2,3) + t(6,3,2)$ och $(x,y,z) = (1,-7,1) + t(3,6,2)$. (6p)

3. Beräkna avståndet från punkten (1,2,3) till planet $3x + y + z = 5$. (6p)

4. Bestäm värdemängden för funktionen $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$. (6p)

5. En triangel har ett hörn i punkten $(0, \frac{1}{2})$. Motstående sida är parallell med y-axeln. Hur stor kan triangelns area vara om hela triangeln ryms inom enhetscirkeln $x^2 + y^2 \leq 1$. (6p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt.

(a) Varje rationell funktion, som inte är ett polynom, har minst en lodrät asymptot.

(b) Om en funktion inte är kontinuerlig så är den inte deriverbar.

(c) Om derivatan av $f(g(x))$ och derivatan av $f(x)$ är lika för alla x så är $g(x) = x$ för alla x.

(d) Om funktionen $f''(x)$ är kontinuerlig på hela $\mathbf{R}$ och har ett enda nollställe $x = a$ så är f konvex på ett av intervallen $(-\infty, a)$ eller (a, ∞) och konkav på det andra.

(e) Ett homogent ekvationssystem har endast den triviala lösningen om systemet har minst en fri variabel.

(f) Negationen till den öppna utsagan $|x^2 - 2| \leq 1$ är den öppna utsagan $x^2 < 1$ eller $x^2 > 3$.

7. (a) Definiera vad som menas med att en funktion f är strängt växande på ett intervall I.

(b) Formulera medelvärdessatsen för derivator.

(c) Visa, med hjälp av medelvärdessatsen, att en funktion f är strängt växande på intervallet I om $f'(x) > 0$ för alla $x \in I$. (6p)

`/stig`

TMV155 Inledande matematik M, 2008–08–27, f V. Lösningar.

---

1. Gauss elimination ger

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 11 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & -4 & 2 & 9 \end{array}\right] \begin{array}{l} -1\ -3 \\ 2 \\ \qquad 2 \end{array} \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -5 & -5 & -15 \end{array}\right] \begin{array}{r} 1 \\ -5\ -1 \\ 1\quad\ \ \end{array} \iff \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 14 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Fri variabel: $x_3 = t$. Sedan fås

$$x_2 = 3 - t, \quad x_1 = 7 - 2t$$

Vi får oändligt många lösningar:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 - 2t \\ 3 - t \\ t \end{bmatrix}$$

2. (a) $P_1 = (1, 2, 3)$ är den givna punkten, $P_0 = (1, 1, 1)$ är en punkt i planet, $\mathbf{n} = (3, 1, 1)$ en normalvektor till planet. Avståndet är absolutbeloppet av skalära projektionen av $\overline{P_0P_1}$ på $\mathbf{n}$:

$$d = \left| \frac{\mathbf{n} \cdot \overline{P_0P_1}}{|\mathbf{n}|} \right| = \frac{|(3, 1, 1) \cdot (0, 1, 2)|}{|(3, 1, 1)|} = \frac{3}{\sqrt{11}}.$$

(b) Vi skriver filen `sprojection.m`:

```
function s=sprojection(u,v)
% Scalar projection of the vector u along the vector v.
%
% Syntax: s=sprojection(u,v)
%
% Input:   u,v - two 1x3 vectors
% Output:  s   - a number

vhat=v/norm(v);
s=dot(u,vhat)*vhat;
```

På kommandoraden skriver man sedan:

```
>>  n=[3,0,-4]
>>  u=[1,2,3]-[2,10,1]
>>  s=sprojection(u,n),  d=abs(s)
```

(c) En normalvektor: $\mathbf{n} = \overline{AB} \times \overline{AC} = (1, 4, 2) \times (2, -1, 3) = (14, 1, -9)$. Planets ekvation blir:

$$\begin{aligned} &\overline{PA} \cdot \mathbf{n} = 0 \\ &14(x - (-1)) + (y - 2) - 9(z - 1) = 0 \\ &14x + y - 9z + 21 = 0 \\ &14x + y - 9z = -21 \end{aligned}$$

3. (a)

$$f(x) = x^2 - 4x - 1, \qquad f(4) = -1,$$
$$f'(x) = 2x - 4, \qquad f'(4) = 4,$$
$$f''(x) = 2.$$

Linjäriseringen är, med $a = 4$,

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = -1 + 4(x - 4).$$

Felet är

$$E(x) = \frac{1}{2} f''(s)(x - a)^2 = \frac{1}{2} 2(x - 4)^2 = (x - 4)^2.$$

Det betyder att funktionen kan skrivas

$$f(x) = x^2 - 4x - 1 = -1 + 4(x - 4) + (x - 4)^2.$$

(b)

$$\text{beräkna residualen: } b = -f(4) = 1$$
$$\text{beräkna derivatan: } a = f'(4) = 4$$
$$\text{beräkna ändringen: } h = b/a = \frac{1}{4}$$
$$\text{uppdatera: } x = x + h = 4 + \frac{1}{4} = 4.25$$

(Roten är det irrationella talet $2 + \sqrt{5} = 4.2361....$)

(c) Man skriver en funktionsfil `funk.m`:

```
function y=funk(x)
y=x^2-4*x-1;
```

Sedan skriver man kommandraden:

```
>> x=newton(@funk,4,1e-6)
```

4. (a)

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \Big| \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \Big| = \Big| \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \Big| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} |x - y| \le \frac{1}{\sqrt{0.01} + \sqrt{0.01}} |x - y| = \frac{1}{0.2} |x - y| = 5|x - y|$$

Man kan även använda medelvärdessatsen: $g(x) - g(y) = g'(s)(x - y)$, där s är en (obekant) punkt mellan x och y. Eftersom

$$|g'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{x}} \le \frac{1}{2\sqrt{0.01}} = \frac{1}{0.2} = 5$$

får vi

$$|g(x) - g(y)| = |g'(s)|\, |x - y| \le 5|x - y|$$

(b)

$$\frac{n^2 + 5}{n^2 + 6} = \frac{1 + 5/n^2}{1 + 6/n^2} \to 1$$

(c) För varje $\epsilon > 0$ finns N så att $i, j \ge N \implies |a_i - a_j| \le \epsilon$.

5. Se kompendiet.

`/stig`

För teknologer inskrivna H06 eller tidigare

1. (a) Se uppgift 1 ovan.
(b) $g'(x) = -xe^{-x}$
(c) 0
(d) $\mathbf{u} = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0)$, $\mathbf{v} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$
(e) $z = \pm\frac{9}{\sqrt{2}}(1+i)$

2. $2(x-1) + 2(y-2) - 9(z-3) = 0$

3. Se uppgift 2a ovan.

4. $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$, $f'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$,

$$\begin{aligned} &f'(x) < 0, \quad -\infty < x < -1 \\ &f'(x) < 0, \quad -1 < x < 0 \\ &f'(0) = 0, \\ &f(0) = 1, \\ &f'(x) > 0, \quad 0 < x < \infty \end{aligned}$$

$$f(x) \to \begin{cases} 0, & x \to -\infty \\ -\infty, & x \to -1^- \\ \infty, & x \to -1^+ \\ \infty, & x \to \infty \end{cases}$$

$R(f) = (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$

5. Låt hörnen vara $(0, \frac{1}{2})$, (a, b), $(a, -c)$ med $a, b, c > 0$. Arean blir

$$A = \frac{1}{2}a(b+c) = \frac{1}{2}a(\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-a^2}) = a\sqrt{1-a^2}$$

Derivatan

$$\frac{dA}{da} = \frac{1-2a^2}{\sqrt{1-a^2}} = 0$$

$a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $A = \frac{1}{2}$.

6. sanna: b, f

7. Se Adams.