1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

a) Beräkna $f'(x)$ då $f(x) = \ln(\tan x)$. (2p)

Svar: $\cot x + \tan x$

b) Bestäm alla reella x så att $|2x - 5| > 3$. (2p)

Svar: $x < 1$ eller $4 < x$.

c) Ge exempel på en funktion f, med $D_f = [0, 1]$, som saknar största värde. (2p)

Svar: $f(x) = \begin{cases} x & \text{om} \quad 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{om} \quad x = 1 \end{cases}$

d) Bestäm alla reella lösningar till ekvationen $\cos 3x = \dfrac{1}{2}$. (2p)

Svar: $x = \pm\pi/9 + n2\pi/3$

e) Avgör för var och en av följande funktioner om de är, 1) begränsade, 2) inverterbara. (3p)

i. $f(x) = x^3 + e^x$,
Svar: ej begränsad, inverterbar.

ii. $g(x) = \ln|x|$,
Svar: ej begränsad, ej inverterbar.

iii. $h(x) = \arctan x$.
Svar: begränsad, inverterbar.

f) Rita lösningsmängderna i det komplexa talplanet till: (3p)

i. $|z - 1 - 2i| = 1$
Svar: Cirkel med radie 1, medelpunkt: $1 + 2i$.

ii. $|z - 5| = |z - 1|$.
Svar: Linjen $x = 3$

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. a) Bestäm för vilket värde på a som de två planen $x - y + 2z = 3$ och $ax + y + z = 0$ är vinkelräta mot varandra. (ON-koordinater i rummet.) (6p)

Lösning: Planens normaler är $(1, -1, 2)$ respektive $(a, 1, 1)$. Planen är vinkelräta mot varandra om och endast om planens normaler är ortogonala vilket gäller om och endast om skalärprodukten $(1, -1, 2) \cdot (a, 1, 1) = 0$. Alltså: $1 \cdot a + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 = a + 1 = 0$.

Svar: Planen är vinkelräta mot varandra om och endast om $a = -1$.

b) Bestäm, för detta värde på a, en parameterframställning av skärningslinjen mellan planen.

Lösning: Skärningslinjen är lösningarna till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - y + 2z &= 3 \\ -x + y + z &= 0 \end{cases} .$$

Eliminering ger $\begin{cases} x - y + 2z &= 3 \\ 3z &= 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 1 + t \\ y &= t \\ z &= 1 \end{cases}$

Svar: $\begin{cases} x &= 1 + t \\ y &= t \\ z &= 1 \end{cases}$

3. Beräkna följande gränsvärden: (6p)

a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{\sin x} - 1}{\tan x}$.

Lösning: $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{\sin x} - 1}{\tan x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{e^{\sin x} - 1}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x \to 0} \dfrac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} \cdot \lim_{x \to 0} \cos x =$

$\{t = \sin x, t \to 0 \text{ då } x \to 0\} = \lim_{t \to 0} \dfrac{e^t - 1}{t} \cdot \cos 0 = 1 \cdot 1 = 1$ (standardgränsvärde) .

Svar: $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{\sin x} - 1}{\tan x} = 1$

b) $\lim_{x \to \infty} x \ln \dfrac{x+2}{x}$.

Lösning: $\lim_{x \to \infty} x \ln \dfrac{x+2}{x} = \lim_{x \to \infty} x \ln \left(1 + \dfrac{2}{x}\right) = \left\{\dfrac{2}{x} = t, t \to 0^+ \text{ då } x \to \infty\right\} =$

$\lim_{t \to 0^+} \dfrac{2}{t} \ln(1 + t) = 2$ (standardgränsvärde).

Svar: $\lim_{x \to \infty} x \ln \dfrac{x+2}{x} = 2$

4. Rita grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+1} e^x$. Ange alla lokala extremvärden och eventuella asymptoter. (6p)

Lösning: $D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, \infty[$.

$f'(x) = \left(\dfrac{2 \cdot (x+1) - (2x+3) \cdot 1}{(x+1)^2} + \dfrac{2x+3}{x+1}\right) e^x = \dfrac{2x^2 + 5x + 2}{(x+1)^2} e^x = \dfrac{2(x + \frac{1}{2})(x+2)}{(x+1)^2} e^x$

$D_{f'} = D_f$

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = (-2+3)e^{-1} \lim_{x \to -1^-} \dfrac{1}{x+1} = -\infty$,

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \infty$, Lodrät asymptot $x = -1$.

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \dfrac{2x+3}{x+1} \lim_{x \to \infty} e^x = 2 \lim_{x \to \infty} e^x = \infty$.

$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{x+1} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = 2 \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty$ (standardgränsvärde). Ingen asymptot då $x \to \infty$

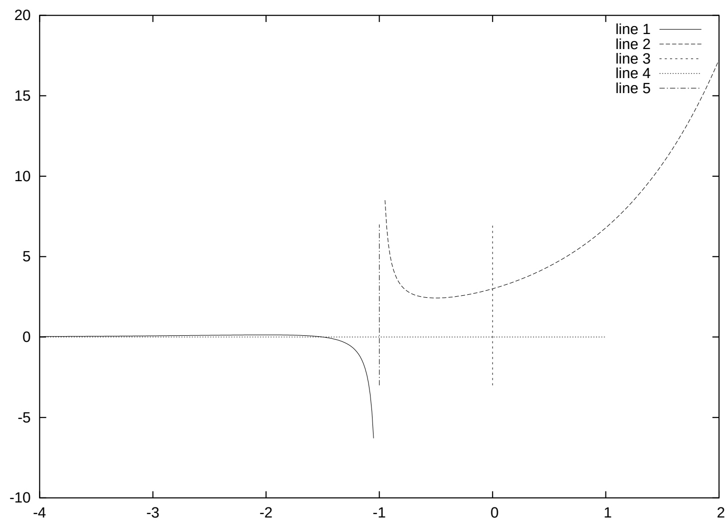
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+3}{x+1} \lim_{x\to-\infty} e^x = 2 \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, vågrät asymptot $y = 0$ då $x \to -\infty$.

x	$-\infty$		-2		-1^-	-1^+		$-\frac{1}{2}$		∞
$f'(x)$		$+$	0	-			-	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^{-2}	$\searrow$	$-\infty$	∞	$\searrow$	$4e^{-\frac{1}{2}}$	$\nearrow$	∞

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$

Svar: Lokalt strängt maximum i punkten $(-2,\ e^{-2})$, lokalt strängt minimum i punkten $(-\frac{1}{2},\ 4e^{-\frac{1}{2}})$.

Vågrät asymptot $y = 0$ då $x \to -\infty$, lodrät asymptot $x = -1$.



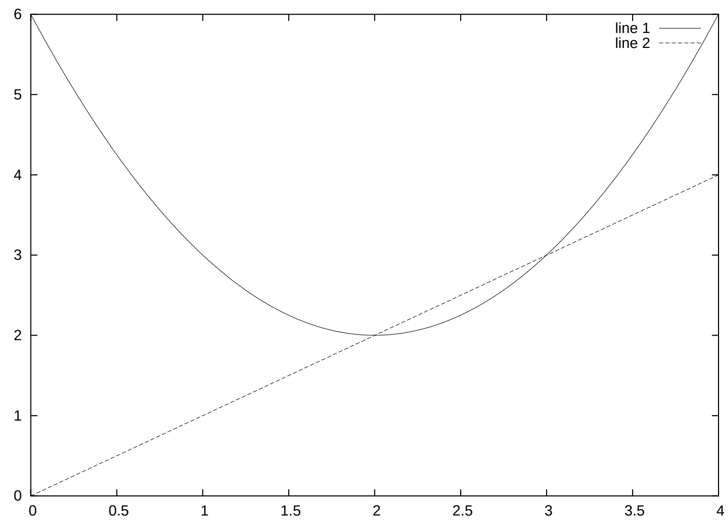
5. En talföljd ges rekursivt genom att $x_0 = 5/2$ och $x_{n+1} = x_n^2 - 4x_n + 6$. Visa att talföjden är konvergent samt bestäm gränsvärdet då $n \to \infty$. (6p)

Lösning: Talföljden ges av $x_{n+1} = f(x_n)$ där $f(x) = x^2 - 4x + 6$. Om följden är konvergent med gränsvärdet a så är a en rot till ekvationen $x = f(x)$. Vi har ju att om $x_n \to a$ då $n \to \infty$ så gäller, eftersom f är kontinuerlig, att $f(x_n) \to f(a)$ då $n \to \infty$. Vi ritar därför grafen till f och linjen $y = x$ i samma figur.

Grafen till f är enklast att rita om vi kvadratkompletterar: $f(x) = x^2 - 4x + 6 = (x-2)^2 + 2$. Minimum för $x = 2$ där $f(x) = 2$.

De x-värden där $y = x$ skär grafen till f är rötterna till $x = f(x)$.

Vi har: $x = f(x) \Leftrightarrow x = x^2 - 4x + 6 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ eller $x = 3$.



f är växande på intervallet $2 \leq x \leq 3$. Då följer att om $2 \leq x_n \leq 3$ så gäller att $f(2) \leq f(x_n) \leq f(3)$. Men $f(2) = 2$, $f(x_n) = x_{n+1}$ och $f(3) = 3$. Alltså har vi att om $2 \leq x_n \leq 3$ så gäller att $2 \leq x_{n+1} \leq 3$.

Eftersom $x_1 = \frac{3}{2}$ uppfyller att $2 \leq x_1 \leq 3$ och vi nu vet att om $2 \leq x_n \leq 3$ så gäller att $2 \leq x_{n+1} \leq 3$. så kan vi, genom induktion, dra slutsatsen att alla x_n uppfyller $2 \leq x_n \leq 3$.

f är en konvex funktion. Sekanten genom två punkter på grafen till en konvex funktion ligger alltid över grafen. Linjen $y = x$ skär grafen i punkterna $(2, 2)$ och $(3, 3)$ och ligger således över grafen om $2 \leq x \leq 3$. Då vet vi att $f(x) \leq x$ om $2 \leq x \leq 3$. Detta kan också inses av kalkylen $f(x) - x = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ vilket visar att $f(x) - x \leq 0$ om $2 \leq x \leq 3$.

Eftersom vi vet att $2 \leq x_n \leq 3$ har vi att $x_n \geq f(x_n) = x_{n+1}$. Följden är således avtagande.

Eftersom följden är avtagande och nedåt begränsad är den konvergent med ett gränsvärde a som enligt ovan är 2 eller 3. Vi vet också att $a \leq \frac{5}{2}$. Alltså är följden konvergent med gränsvärdet 2.

Svar: Talföljden är konvergent med gränsvärdet 2.

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

   a) Varje linjärt ekvationssystem med fler ekvationer än obekanta saknar lösning.

      Svar: Falskt. (Motex: Ett system bestående av tre identiska ekvationer med två obekanta har alltid oändligt många lösningar.)

   b) Varje linjärt ekvationssystem med fler obekanta än ekvationer har oändligt många lösningar.

Svar: Falskt. (Motex: $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$ saknar lösning.)

c) Om f är deriverbar och begränsad på ett intervall I så är även f' begränsad på I.

Svar: Falskt (Motex: $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ är deriverbar och begränsad på $]0,\pi[$ men derivatan $f'(x) = -\frac{1}{x^2}\cos(\frac{1}{x})$ är obegränsad.)

d) Om f är deriverbar och f' är begränsad på ett intervall I så är f begränsad på I.

Svar: Falskt (Motex: $f(x) = x$ på $\mathbb{R}$.)

e) Om $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ och $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}$ så är $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$. ($\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$ är vektorer i rummet.)

Svar: Falskt. (Motex: Låt $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$ vara en ON-bas för rummet.)

f) Negationen till utsagan "för varje $x \in [a,b[$ finns $y \in [a,b[$ så att $f(x) < f(y)$" är utsagan "det finns $x \in [a,b[$ så att för varje $y \in [a,b[$ är $f(y) \leq f(x)$".

Svar: Sant.

7\. a) Formulera medelvärdessatsen. (2p)

Svar: Se boken.

b) Bevisa med hjälp av medelvärdessatsen att om f är deriverbar med $f'(x) > 0$ på ett intervall I så är f strängt växande på I. (4p)

Svar: Se boken.