MATEMATIK
Chalmers

Lösningar till tentamen i
Inledande matematik för M/TD, TMV155/175
Tid: 2006-10-27, kl 08.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga

Betygsgränser, ev bonuspoäng inräknad: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

a) Bestäm de gemensamma punkterna till planen (2p)
$2x + y = 3$, $y + 2z = 1$ och $x + y + z = 2$.
Lösning:
Man ska lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} x & +y & +z & = & 2 \\ 2x & +y & & = & 3 \\ & y & +2z & = & 1 \end{cases}$$

Det visar sig då att en av ekvationerna är överflödig och man får en enparametrig lösning (dvs de tre planen skär varandra i en linje):

$$\begin{cases} x & = & 1+t \\ y & = & 1-2t \\ z & = & t \end{cases}$$

b) Bestäm alla reella x som uppfyller olikheten $\dfrac{x+2}{3-x} \geq 0$. (2p)

Lösning: Olikheten är ekvivalent med $\dfrac{x+2}{x-3} \leq 0$. Denna olikhet gäller om täljaren är 0, alltså om $x = -2$, eller om täljare och nämnare har olika tecken. Det senare gäller om $-2 < x < 3$. Sammantaget konstaterar vi att olikheten gäller om $-2 \leq x < 3$..

c) Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $x^3 + y^3 = 2$ i punkten $(1,1)$. (2p)
Lösning: Via implicit derivering följer att

$$3x^2 + 3y^2y' = 0$$

ur vilket det snabbt följer att

$$y' = -\frac{x^2}{y^2}.$$

Således är $y'(1) = -1$ och eftersom tangentlinjen passerar genom (1,1) måste den ha ekvationen

$$y = 2 - x.$$

d) Lös ekvationen $z^3 = i$. Svaren ska ges på formen $a + bi$. (2p)
Lösning: Vi har

$$z^3 = i = e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi n)}$$

vilket ger

$$z = e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3})},$$

dvs

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}},\ z_2 = e^{i\frac{5\pi}{6}},\ z_3 = e^{i\frac{9\pi}{6}}$$

dvs

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{2},\ z_2 = \frac{-\sqrt{3}+i}{2},\ z_3 = -i.$$

e) Beräkna följande gränsvärden: (3p)

i. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}$ ii. $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x}$ iii. $\lim_{x\to\infty} \frac{(x+e^x)^2}{3e^{2x}}$

Lösning: Eftersom $\sqrt{4x^2+1} = |2x|\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}$ gäller att det första gränsvärdet är 2 och det andra är -2. För det tredje, observera att $(x+e^x)^2 = e^{2x}+2xe^x+x^2$, kom ihåg att exponentiellt växande dominerar över polynomiellt och dra härav slutsatsen att det tredje gränsvärdet är $\frac{1}{3}$.

f) Ge exempel på en funktion f sådan att $f'(0)$ existerar, men inte $f''(0)$. (3p)
Lösning: T.ex.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. Bestäm en ekvation för det plan som innehåller punkterna $(2,-1,0)$, $(-1,-1,-1)$ och $(2,1,1)$. Beräkna sedan avståndet från punkten $(1,1,1)$ till planet. (6p)

Lösning: Två vektorer som är parallella till planet ges av $v_1 = \overrightarrow{(2,-1,0)(-1,-1,-1)} = (-3,0,1)$ och $v_2 = \overrightarrow{(2,-1,0)(2,1,1)} = (0,2,1)$. Därför ges planets normalriktning av $n = v_1 \times v_2 = (2,3,-6)$ och planets ekvation är $2x+3y-6z = D$. Via insättning av vilken som helst av de tre angivna punkterna i planet ser man att $D = 1$ varför planets ekvation är

$$2x+3y-6z = 1.$$

En vektor från planet till punkten (1,1,1) är t.ex. vektorn $u = (2,2,2)$ (som man får genom att låta u's fotpunkt vara (1,1,1)). Avståndet mellan planet och (1,1,1) är längden av projektionen av u på n, dvs

$$\text{avståndet } = \frac{|u\cdot n|}{|n|} = \frac{2}{7}.$$

3. Beräkna största värdet av funktionen $f(x) = \sqrt{1+x} - \dfrac{x}{2}$ $(x \geq -1)$. (6p)

Lösning: Det gäller att

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2}$$

som är 0 precis då $\sqrt{1+x} = 1$, dvs då $x = 0$. Eftersom man via inspektion ser att $f'(x)$ är positiv då $x < 0$ och negativ då $x > 0$ följer att f antar sitt största värde för $x = 0$. Eftersom $f(0) = 1$ är alltså f's största värde just 1.

4. Rita grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x}{x^2 - 1}$. (6p)
Ange eventuella lokala extrempunkter och asymptoter. (Konvexitet/konkavitet behöver inte utredas.)

Lösning: $f'(x) = \dfrac{x^4 + x^2 + 4}{(x^2-1)^2}$ är positiv för alla $x \in D_f$. Funktionen är alltså växande i alla intervall i D_f. Observera att

$$f(x) = \frac{x(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+1)}$$

ur vilket man snabbt ser att

$$\lim_{x \to -1-} f(x) = \infty, \lim_{x \to -1+} f(x) = -\infty, \lim_{x \to 1-} f(x) = \infty, \lim_{x \to 1+} f(x) = -\infty.$$

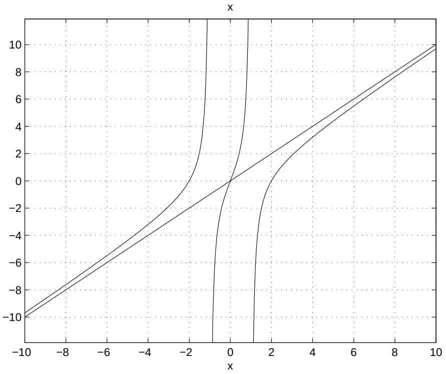
Därför har f lodräta asymptoter $x = -1$ och $x = 1$. Dessutom gäller att

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

och

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - x) = 0$$

ur vilket man ser att f har den sneda asymptoten $y = x$, både då $x \to \infty$ och då $x \to -\infty$.



---

5. Ett 2 m högt staket löper parallellt med ett höghus, på 1 m avstånd från huset. Hur lång är den kortaste stege som når husväggen från marken och över staketet? (6p)

Lösning: Den kortaste stegen som når från marken till husväggen över staketet ligger, då den står uppställd, naturligtvis an mot staketet. Betrakta nu en stege som står uppställd på detta sätt, dvs står uppställd med ena änden på marken och andra änden mot husväggen och ligger an mot staketet. Låt θ beteckan den vinkel som bildas mellan husväggen och stegen, vilket förstås är samma vinkel som den som bildas mellan staketet och stegen. Låt $L(\theta)$ beteckna längden av stegen. Vi vill finna $L(\theta)$'s minsta värde. Per definition av de elementära trigonometriska funktionerna och det faktum att staketet är 2m högt och beläget 1m från huset gäller att

$$L(\theta) = \frac{2}{\cos\theta} + \frac{1}{\sin\theta}.$$

Av situationen är det uppenbart att minimum ska sökas där L har en kritisk punkt. Det gäller att

$$L'(\theta) = \frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} = \frac{2\sin^3\theta - \cos^3\theta}{\cos^2\theta\sin^2\theta} = 0$$

precis då

$$2\sin^3\theta = \cos^3\theta$$

dvs då

$$\tan\theta = \frac{1}{2^{1/3}}.$$

Med en enkel figur av en rätvinklig triangel kan man inse att om $\tan t = 1/a$ och $t \in (0, \pi/2)$ så gäller att

$$\cos t = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, \ \sin t = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Tillämpa detta med $t = \theta$ och $a = 2^{1/3}$m sätt in i uttrycket för L och få att längden för den kortaste stegen är

$$\frac{2\sqrt{1+2^{2/3}}}{2^{1/3}} + \sqrt{1+2^{2/3}} = (1+2^{2/3})\sqrt{1+2^{2/3}} = (1+2^{2/3})^{3/2}.$$

Svaret är alltså att den kortaste stegen som når från marken till väggen över staketet är $(1+2^{2/3})^{3/2}$ meter (vilket i siffror blir cirka 4.16 meter).

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

---

a) Om $f(x)$ och $g(x)$ är växande på ett intervall I så är också $f(x)+g(x)$ växande på I.
Lösning:
Sant, ty om $x < y$ så är ju $f(x) < f(y)$ och $g(x) < g(y)$ ur vilket det följer att $f(x) + g(x) < f(y) + g(y)$.

b) Varje deriverbar funktion är kontinuerlig.
Lösning:
Sant, ty om $f'(a)$ existerar gäller att

$$\lim_{h\to 0}(f(x+h) - f(x)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot h$$
$$= (\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}) \cdot (\lim_{h\to 0} h) = f'(a) \cdot 0 = 0.$$

c) Om $f(x) \to \infty$ då $x \to 0$ och $g(x) \to \infty$ då $x \to 0$, så måste $f(x) - g(x) \to 0$ då $x \to 0$.
Lösning: Falskt, t.ex. om $f(x) = \frac{1}{x}$ och $g(x) = \frac{1}{2x}$.

d) Triangeln med hörn i punkterna (-3,0,-1), (-1,-1,1) och (1,6,-2) är rätvinklig.
Lösning: Sant; vinkeln vid punkten (-3,0,1) är rät, ty de två vektorer som representeras av de två vektorerna med denna punkt som fot och triangelns övriga två hörn som ändpunkter är $(2, -1, 2)$ och $(4, 6, -1)$ och skalärprodukten av dessa två vektorer är $8 - 6 - 2 = 0$.

e) Om f är en funktion som är deriverbar på $[a, b]$ och $f(a) < f(b)$ så finns ett tal $c \in (a, b)$ sådant att $f'(c) > 0$.
Lösning:
Sant, ty enligt medelvärdessatsen finns ett tal $c \in (a, b)$ sådant att

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0.$$

f) $\dfrac{d}{dx}|x^2 + x| = |2x + 1|$.
Lösning:
Falskt, ty för $x < -1$ är $x^2 + x$ positivt varför $|x^2 + x| = x^2 + x$ som har derivata $2x + 1$. Men då $x < -1$ är ju $2x + 1$ negativt, så $|2x + 1| \neq 2x + 1$.

7. a) Definiera derivatan av en funktion f i en punkt a. (6p)
Lösning:
Derivatan av en funktion f i punkten a ges av

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

då detta gränsvärde existerar (och är ändligt).

b) Låt

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{då} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{då} \quad x = 0 \end{cases}$$

Beräkna $f'(x)$ då $x \neq 0$.

Lösning:
Då $x \neq 0$ gäller att

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

c) Visa med hjälp av derivatans definition att $f'(0) = 0$.
Lösning:
Enligt (a) gäller det att visa att

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0.$$

Men $\frac{f(h)-f(0)}{h} = h \sin \frac{1}{h} \to 0$ då $h \to 0$ eftersom $\sin \frac{1}{h}$ är begränsad.

d) Visa att f' ej är kontinuerlig i $x = 0$.
Lösning:
$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ saknar gränsvärde i $x = 0$.