MATEMATIK Lösning till tentamen i Inledande matematik för M1/TD1, TMV155/175
Chalmers Tid: 2007-01-19, kl 08.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

a) Ange absolutbelopp och ett argument för vart och ett av de komplexa talen $3-4i$ och $-7+3i$. (2p)

Lösning: $|3-4i| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5$. $\mathrm{Arg}(3-4i) = \tan^{-1}(-\frac{4}{3}) = -\tan^{-1}(\frac{4}{3})$, en vinkel i den 4:e kvadranten.
PSS, $|-7+3i| = \sqrt{(-7)^2+3^2} = \sqrt{58}$ och $\mathrm{Arg}(-7+3i) = \tan^{-1}(-\frac{3}{7}) + \pi = \pi - \tan^{-1}(\frac{3}{7})$. En vinkel i andra kvadranten.

Svar: $|3-4i| = 5$, $\mathrm{Arg}(3-4i) = -\tan^{-1}(\frac{4}{3})$, $|-7+3i| = \sqrt{58}$ och $\mathrm{Arg}(-7+3i) = \pi - \tan^{-1}(\frac{3}{7})$.

b) Ange alla reella x som uppfyller olikheten $(x+2)(x^2+x-6) \geq 0$. (2p)

Lösning: $(x+2)(x^2+x-6) \geq 0 \Leftrightarrow (x+3)(x+2)(x-2) \geq 0. \Leftrightarrow$
$-3 \leq x \leq -2$ eller $2 \leq x$

Svar: $[-3,-2] \cup [2,\infty[$

c) Beräkna $\sin\frac{\pi}{12}$. (2p)

Lösning: Man använder följande fakta :

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A \sin B,$$
$$\frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

Därmed har vi att

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

Svar: $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

d) Ange alla lösningar till ekvationssystemet (3p)

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x - y + 8z = -1 \\ 2x + 3y + z = 8 \end{cases}$$

Lösning: Eliminering ger $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 8 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 8 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right] \Leftrightarrow$
$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

Svar:

$$\begin{cases} x &= 1-5t \\ y &= 2+3t \\ z &= t \end{cases}$$

e) Ange följande gränsvärden: (3p)

i. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x^2}{x^2+x^4}$
Lösning:

$$\frac{\sin 4x^2}{x^2+x^4} = \frac{\sin 4x^2}{4x^2} \cdot \frac{4x^2}{x^2(1+x^2)} = 4 \cdot \frac{\sin 4x^2}{4x^2} \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

Då $x \to 0$ så går båda kvoten mot 1, så svaret blir 4.
Svar: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x^2}{x^2+x^4} = 4$

ii. $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$
Lösning: $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = \frac{|x|\sqrt{1+1/x^2}}{x+1} =$ då x är negativt $= -\frac{\sqrt{1+1/x^2}}{1+1/x} \to -1$
Svar: $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = -1$

iii. $\lim_{x\to \infty} \frac{2x+3\ln x}{x+\ln x}$
Lösning:

$$\frac{2x+3\ln x}{x+\ln x} = \frac{2x\left(1+\frac{3\ln x}{x}\right)}{x\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)} = 2 \cdot \frac{1+\frac{3\ln x}{x}}{1+\frac{\ln x}{x}}.$$

Eftersom $\frac{\ln x}{x} \to 0$ då $x \to \infty$ så är gränsvärdet lika med 2.
Svar: $\lim_{x\to \infty} \frac{2x+3\ln x}{x+\ln x} = 2$

f) Låt $f(x) = x^3 + 2x$ och notera att f är en injektiv (one-to-one) funktion. Beräkna $(f^{-1})'(3)$. (3p)
Lösning: Vi använder formeln

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)},$$

där $y = f(x)$. Här är $y = 3$ så vi söker x sådan att $3 = x^3 + 2x$. Man ser direkt att $x = 1$. Eftersom $f'(x) = 3x^2 + 2$ för godtyckligt x så har vi att

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3\cdot 1^2 + 2} = \frac{1}{5}.$$

Svar: $(f^{-1})'(3) = \frac{1}{5}$.

MATEMATIK
Chalmers

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. Ange på normalform en ekvation för det plan som är parallellt med vektorerna $(-1,\ -1,\ -1)$ och $(2,\ 1,\ 1)$ och innehåller punkten $(2,\ -1,\ 0)$. Ange också en ekvation för den räta linje som är vinkelrät mot planet och går genom punkten $(-2,\ 2,\ 3)$. (6p)

   Lösning: Planets normalvektor och tillika riktningsvektor för den sökta linjen är $(-1,\ -1,\ -1) \times (2,\ 1,\ 1) = (0,\ 1,\ -1)$.

   Detta ger planets ekvation på normalform:
   $0(x-2) + 1(y-(-1)) - 1(z-0) = 0$
   och linjens ekvation $(x,\ y,\ z) = (-2,\ 2,\ 3) + t(0,\ 1,\ -1)$.

   Svar: Planets ekvation: $y - z = -1$,
   linjens ekvation: $(x,\ y,\ z) = (-2,\ 2,\ 3) + t(0,\ 1,\ -1)$.

3. Beräkna största och minsta värdet av funktionen $f(x)\dfrac{x-1}{x^2+4x+4}$ i intervallet $x \geq 0$. (6p)

   Lösning: $x^2 + 4x + 4 > 0$ för alla x, alltså är $D_f = [0, \infty[$.

   Vi har att $f(0) = -\frac{1}{4}$ och $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1-1/x}{x(1+4/x+4/x^2)} = 0$.

   Vidare är $f'(x) = \dfrac{-x^2+2x+8}{(x+2)^4} = -\dfrac{x^2-2x-8}{(x+2)^4} = -\dfrac{(x-4)(x+2)}{(x+2)^4} = -\dfrac{x-4}{(x+2)^3}$ vilket ger oss nedanstående teckentabell för derivatan.

x	0	$0 < x < 4$	4	$4 < x$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{1}{12}$	$\searrow$	0

   Svar: Största värdet är $f(4) = \frac{1}{12}$, minsta är $f(0) = -\frac{1}{4}$.

4. Rita grafen till funktionen $f(x) = \ln(x^2 + 3x + 3) - x$. (6p)
   Ange eventuella lokala extrempunkter och asymptoter. (Konvexitet/konkavitet behöver inte utredas.)

   Lösning: Notera att $x^2 + 3x + 3 > 0$ för alla reella x ty den kvadratiska ekvationen $x^2+3x+3 = 0$ har två komplexa rötter. Så definitionsmängden till f är hela $\mathbb{R}$. Det finns ingen vertikal asymptot.

   $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$.

   $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x(\Big(\frac{2\ln(x)\ln(1+3/x+3/x^2)}{x} - 1\Big) = -\infty$.

   Det finns således ingen horisontell asymptot.

För att bestämma ev. sned asymptot beräknasr vi gränsvärdena:
$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} (\left(\frac{2\ln(|x|)\ln(1+3/x+3/x^2)}{x} - 1\right) = -1 = k.$

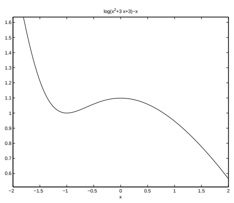
och

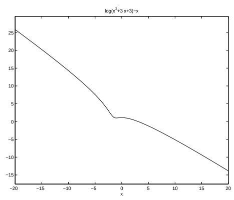
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - kx = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) + x = \lim_{x\to\pm\infty} \ln(x^2+3x+3) = \infty.$
Finns alltså ingen sned asymptot

Vidare är $f'(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x+3} - 1 = -\dfrac{x(x+1)}{x^2+3x+3}$ vilket ger oss nedanstående teckentabell för derivatan.

x	$-\infty$	$-\infty < x < -1$	-1	$-1 < x < 0$	0	$0 < x < \infty$	∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	-	
$f(x)$	∞	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\ln(3)$	$\searrow$	$-\infty$

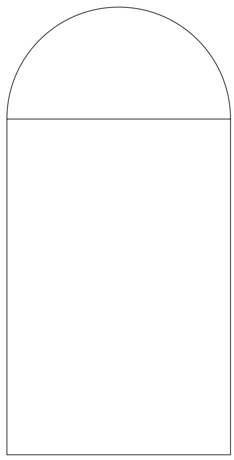
Med stöd av tabellen ovan kan vi rita grafen till funktionen.





Svar: Lokalt maximum i punkten $(0, \ln(3))$, lokalt minimum i punkten $(-1, 1)$. Inga asymptoter.

5. Ett tvådelat fönster består av en rektangulär klar glasskiva och en halvcirkelformad färgad glasskiva (se fig). (6p)



Det färgade glaset släpper in hälften så mycket ljus som det klara. Om hela fönstrets omkrets är given, bestäm rektangelsidornas proportioner så att ljusinsläppet blir maximalt.

Lösning: Låt rektangelns bas vara $2r$ och dess höjd h. Vi söker förhållandet mellan h och $2r$.

Fönstrets omkrets är given, kalla den K. Vi har alltså $K = 2h + 2r + \pi r$, vilket ger $h = (K - r(2+\pi))/2$. Arean av halvcirkeln är $\frac{1}{2}\pi r^2$, arean av rektangeln är $2rh = r(K - r(2+\pi))$.

Ljusinsläppet är då, bortsett från någon konstant faktor beroende av glaskvalitet mm, $f(r) = \frac{1}{4}\pi r^2 + r(K - r(2+\pi)) = Kr - (2 + \frac{3}{4}\pi)r^2$.

$f'(r) = K - 2(2 + \frac{3}{4}\pi)r$. Man ser direkt att $f'(r) > 0$ för $r < \frac{K}{2(2+\frac{3}{4}\pi)}$ och att $f'(r) < 0$ för $r > \frac{K}{2(2+\frac{3}{4}\pi)}$.

f antar således sitt största värde för $r = \frac{K}{2(2+\frac{3}{4}\pi)} = \frac{2K}{8+3\pi}$.

Då är $h = (K - r(2+\pi))/2 = (K - \frac{2K(2+\pi)}{8+3\pi})/2 = \frac{K(4+\pi)}{2(8+3\pi)}$.

Förhållandet $h : b = h : 2r = \frac{K(4+\pi)}{2(8+3\pi)} / \frac{4K}{8+3\pi} = \frac{4+\pi}{8}$.

Svar: $\dfrac{h}{b} = \dfrac{4+\pi}{8} \approx 0.9$.

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

   a) För alla komplexa tal z och w gäller att $|z + w| \geq |z| + |w|$.
   Lösning: Pröva med t.ex. $z = 1$, $w = -1$.
   Svar: Falskt.

   b) $e^x > 1 + x$ för alla $x > 0$.
   Lösning: Av definitionen följer direkt att $\ln(1+x) < x$ för alla $x > 0$. Eftersom exponentialfunktionen är växande följer att $e^x > 1 + x$ för alla $x > 0$.
   Svar: Sant

   c) Om f, g är deriverbara funktioner sådan att $f(x) > g(x)$ för alla $x \in \mathbf{R}$ så gäller också att $f'(x) > g'(x)$ för alla $x \in \mathbf{R}$.
   Lösning: Lätt att hitta ett motexempel, t.ex. $\arctan x < \pi/2$ för alla x men derivatorna uppfyller inte olikheten.
   Svar: Falskt.

   d) Det finns minst ett reellt tal x sådan att $7x^{105} + 3x^{36} + 2x^{19} + 418 = 0$.
   Lösning: Med $f(x) = 7x^{105} + 3x^{36} + 2x^{19} + 418$ har vi att $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Funktionen är kontinuerlig, satsen om mellanliggande värde ger att ekvatione $f(x) = 0$ har minst en reell rot.
   Svar: Sant

   e) Om $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$ är tre vektorer i ett och samma plan så gäller att $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$.
   Lösning: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ är normal till planet som innehåller de tre vektorerna.
   Svar: Sant

f) Om $f(0) = f''(0) = 0$ så måste också $f'(0) = 0$.
Lösning: Lätt att hitta motexempel, t.ex. $f(x) = \sin(x)$.
Svar: Falskt

7. a) Definiera vad som menas med att en funktion f är kontinuerlig i en punkt a. (6p)
Svar: Se boken. Många tror det har med deriverbarhet att göra, vilket är en fundamental missuppfattning.

b) Formulera satsen om mellanliggande värde för kontinuerliga funktioner (Intermediate Value Theorem).
Svar: Se boken.

c) Låt f vara en kontinuerlig funktion från det slutna intervallet $[0, 1]$ till sig självt. Bevisa att det måste finnas minst en punkt $x \in [0, 1]$ sådan att $f(x) = x$.
(TIPS : Betrakta $f(x) - x$).
Bevis: Om $f(0) = 0$ eller $f(1) = 1$ så är det klart. Annars kan vi bilda funktionen $g(x) = f(x) - x$. Då är $g(0) = f(0) - 0 > 0$ och $g(1) = f(1) - 1 < 0$. Satsen om mellanliggande värde ger att $g(x) = 0$ för något $x \in]0, 1[$.

/Carl-Henrik