Matematik Chalmers

Övningstentamen i TMV155+TMV175 Inledande matematik M, TD, 2007

Telefon: xxx
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje uppgift är värd 10 poäng, totalt 50 poäng. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost.

(Här är nog lite för många deluppgifter men det gör inget när du ska öva dig.)

1. (a) Skissa grafen till funktionen $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4}$ med angivande av definitionsmängd, kritiska punkter, inflektionspunkter och asymptoter.

(b) Skriv Matlab-kommandon som plottar grafen på ett lämpligt intervall.

2. (a) Bestäm ekvationerna för den räta linjen som går genom punkten $(1, 2, 3)$ och är parallell med vektorn $(4, 5, 6)$.

(b) Använd projektion för att beräkna avståndet mellan planet $x+y+z = 3$ och punkten $(4, 5, 6)$.

(c) Skriv en Matlab funktionsfil som beräknar vektorprojektionen av vektorn $\mathbf{u}$ på vektorn $\mathbf{v}$.

3. (a) Bestäm linjäriseringen av $f(x) = \sqrt{x}$ i punkten $a = 1$ och uppskatta linjäriseringsfelet som funktion av $x - 1$ på intervallet $[\frac{1}{4}, 2]$.

(b) Beräkna med hjälp av deriveringsregler $f'(x)$ för

$$f(x) = \sqrt{x}(1 - x^2)^3$$

(c) Bestäm derivatan av $f(x) = x^3$ i punkten 2 med hjälp av definitionen av derivata.

(d) Skriv Matlab-kommandon som beräknar derivatan i uppgift (c) numeriskt. Använd optimal steglängd.

4. Betrakta funktionen

$$g(x) = \sqrt{x}.$$

(a) Visa att g är Lipschitzkontinuerlig på intervallet $[0.01, 10]$ och bestäm en Lipschitzkonstant för g på detta intervall.

(b) Låt $a_n = \dfrac{n^2+5}{n^2+6}$. Bestäm $\lim_{n\to\infty} a_n$.

(c) Skriv Matlab-kommandon som genererar de 100 första termerna i följden a_n i form av en kolonnvektor.

(d) Bestäm N så att

$$n \geq N \Rightarrow \left| \frac{n^2}{n^2+1} - 1 \right| \leq 10^{-6}$$

5. (a) Formulera fixpunktssatsen.

(b) Redogör för den del av beviset som visar att

$$|x_{k+1} - x_k| \leq L^k |x_1 - x_0|$$

/stig

TMV155+TMV175 Inledande matematik M, TD, 2007. Lösningar.

---

1. (a) Se Adams 4.4 Example 7, sid 233.

(b)

```
>> x=linspace(-4,4);
>> y=(x.^2-1)/(x.^2-4);
>> plot(x,y,'.')
```

2. (a)

$$\begin{aligned} x &= 1 + t4, \\ y &= 2 + t5, \\ z &= 3 + t6 \end{aligned}$$

(b) I planets ekvation ser vi att $P = (1, 1, 1)$ är en punkt i planet och $n = (1, 1, 1)$ är en normalvektor. Låt $P_0 = (4, 5, 6)$ vara den givna punkten. Det sökta avståndet är absolutbeloppet av den skalära projektionen av vektorn $PP_0 = (3, 4, 5)$ på vektorn n:

$$s = \left| \frac{PP_0 \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \right| = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

(Adams sid 550 och 565.)

(c)

```
function w=vprojection(u,v)
  vhat=v/norm(v);
  w=dot(u,vhat)*vhat;
```

3. (a)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} = x^{1/2}, & f(1) &= 1 \\ f'(x) &= \frac{1}{2}x^{-1/2}, & f'(1) &= \frac{1}{2} \\ f''(x) &= -\frac{1}{4}x^{-3/2} \end{aligned}$$

Linjäriseringen är

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = 1 + \frac{1}{2}(x - 1) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Felet är

$$E(x) = \frac{1}{2}f''(s)(x - a)^2 = -\frac{1}{2}\frac{1}{4}s^{-3/2}(x - 1)^2 = -\frac{1}{8}\frac{1}{s^{3/2}}(x - 1)^2$$

där s är en (obekant) punkt mellan x och 1. Då x ligger i intervallet $[\frac{1}{4}, 2]$, måste s ligga i samma intervall. Alltså får vi begränsningen

$$|E(x)| = \frac{1}{8}\frac{1}{s^{3/2}}(x - 1)^2 \leq \frac{1}{8}\frac{1}{(\frac{1}{4})^{3/2}}(x - 1)^2 = \frac{1}{8}\frac{1}{(\frac{1}{8})}(x - 1)^2 = (x - 1)^2$$

där vi använt värsta fallet för s.

(b) $\frac{1}{2\sqrt{x}}(1 - x^2)^3 + \sqrt{x}3(1 - x^2)^2(-2x)$

(c)

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^3-2^3}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{2^3+3\cdot 2^2h+3\cdot 2h^2+h^3-2^3}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{12h+6h^2+h^3}{h} = \lim_{h\to 0}(12+6h+h^2) = 12\end{aligned}$$

(d)

```
>> h=1e-5
>> x=2
>> fprim = ( (x+h)^3 - (x-h)^3)/(2*h)
```

Steglängden $h = 10^{-5}$ är optimal i MATLAB.

4. (a)

$$\begin{aligned}|\sqrt{x}-\sqrt{y}| &= \Big|\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\Big|\\ &= \Big|\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\Big| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}|x-y| \le \frac{1}{\sqrt{0.01}+\sqrt{0.01}}|x-y| = \frac{1}{0.2}|x-y| = 5|x-y|\end{aligned}$$

Man kan även använda medelvärdessatsen:

$$g(x)-g(y) = g'(s)(x-y)$$

där s är en (obekant) punkt mellan x och y. Eftersom

$$|g'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{x}} \le \frac{1}{2\sqrt{0.01}} = \frac{1}{0.2} = 5$$

får vi

$$|g(x)-g(y)| = |g'(s)|\,|x-y| \le 5|x-y|$$

(b)

$$\frac{n^2+5}{n^2+6} = \frac{1+5/n^2}{1+6/n^2} \to 1$$

(c)

```
>> n=1:100
>> a=(n.^2+5)/(n.^2+6)
>> a=a'
```

(d)

$$\Big|\frac{n^2}{n^2+1}-1\Big| = \Big|\frac{n^2-(n^2+1)}{n^2+1}\Big| = \Big|\frac{-1}{n^2+1}\Big| = \frac{1}{n^2+1} \le \frac{1}{n^2} \le 10^{-6}$$

Vi löser ut n:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n^2} \le 10^{-6}\\ &n^2 \ge 10^6\\ &n \ge 10^3\end{aligned}$$

Tag $N = 10^3$.

5. (a) Antag att I är ett slutet intervall och att $g : I \to I$ är en kontraktion. Då har g en unik fixpunkt $\bar{x} \in I$. Fixpunkten fås som gränsvärde $\bar{x} = \lim_{i\to\infty}$ till fixpunktsiterationen, $x_i = g(x_{i-1})$, för godtycklig startpunkt $x_0 \in I$.

(b) Eftersom g avbildar I på I så vet vi att $x_k = g(x_{k-1}) \in I$. Lipschitz-villkoret ger då

$$|x_{k+1} - x_k| = |g(x_k) - g(x_{k-1})| \le L|x_k - x_{k-1}|,$$

och på samma vis

$$|x_k - x_{k-1}| \le L|x_{k-1} - x_{k-2}|.$$

Genom upprepning av detta får vi:

$$\begin{aligned} |x_{k+1} - x_k| &\le L|x_k - x_{k-1}| \\ &\le L^2|x_{k-1} - x_{k-2}| \\ &\le L^3|x_{k-2} - x_{k-3}| \\ &\le \cdots \le L^k|x_1 - x_0|, \end{aligned}$$

vilket leder till

$$|x_{k+1} - x_k| \le L^k|x_1 - x_0|.$$

`/stig`