Matematik Chalmers

Övningstentamen 2 i TMV155+TMV175 Inledande matematik M, TD, 2007

Telefon: xxx
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje uppgift är värd 10 poäng, totalt 50 poäng. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost.

---

1. (a) Redogör definitionen av att en funktion är Lipschitz-kontinuerlig på ett intervall.

(b) Beräkna derivatan av $g(x) = (x+1)e^{-x}$.

(c) Beräkna absoluta maximum och minimum för $f(x) = g'(x)$ på intervallet $[0, 2]$.

(d) Beräkna (med hjälp av derivata) en Lipschitz-konstant för funktionen g på intervallet $[0, 2]$.

2. (a) Uttryck vektorn $\mathbf{a} = (2, 1, 1)$ som en summa $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ där $\mathbf{u}$ är parallell med vektorn $\mathbf{b} = (1, 1, 0)$ och $\mathbf{v}$ är ortogonal mot $\mathbf{u}$.

(b) Bestäm ekvationen för det plan som går genom punkterna $(0, 0, 0)$, $(1, 2, 3)$ och $(4, 5, 6)$.

(c) Skriv en MATLAB-funktion som beräknar kryssprodukten av två vektorer.

3. (a) Bestäm linjäriseringen av $f(x) = x^2 - 4x - 1$ i punkten 4. Bestäm även linjäriseringsfelet.

(b) Skriv ned en iteration av Newtons metod för ekvationen $x^2 - 4x - 1 = 0$ med startpunkt $x_0 = 4$.

(c) Beskriv hur man löser $x^2-4x-1 = 0$ med det program `newton.m` som du har skrivit. Du behöver inte skriva ned själva programmet `newton.m` utan bara kommandoraden samt den funktionsfil som behövs.

4. (a) Redogör för definitionen av gränsvärde $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. (3 p)

(b) Beräkna (med räkneregler) gränsvärdet $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$. (3 p)

(c) Bestäm δ så att (4 p)

$$|x-9| \le \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{x-9}{\sqrt{x}-3} - 6\right| \le 10^{-6}.$$

(d) Beräkna med Taylor-utveckling gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{1 - \cos x}$$

5. (a) Formulera Bolzanos sats (om lösning av ekvationen $f(x) = 0$).

(b) Skriv ned bisektionsalgoritmen.

(c) Räkna upp de fyra stegen av beviset till Bolzanos sats.

(d) Genomför ett av stegen (dock inte det första, det är för lätt).

`/stig`

TMV155+TMV175 Inledande matematik M, TD, 2007. Lösningar.

---

1. (a) Funktionen g är Lipschitz-kontinuerlig på intervallet I om det finns enkonstant L sådan att

$$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in I.$$

(b) $g'(x) = -xe^{-x}$

(c) $f(x) = g'(x) = -xe^{-x}$. Kritiska punkter ges av $f'(x) = (x-1)e^{-x} = 0$, dvs $x = 1$. Derivatan är negativ till vänster och positiv till höger om $x = 1$. Vi har alltså lokalt minimivärde $f(1) = -e^{-1}$ i $x = 1$. I ändpunkterna av intervallet $[0, 2]$ har vi lokala maximivärden $f(0) = 0$ och $f(2) = -2e^{-2}$. Vi ser att absolut maximivärde är $f(0) = 0$ och absolut minimivärde är $f(1) = -e^{-1}$.

(d) Enligt (c) har vi $-e^{-1} \leq g'(x) \leq 0$ för $x \in [0, 2]$. Lipschitz-konstanten ges av

$$L = \max |g'(x)| = e^{-1}.$$

2. (a) Vektorn $\mathbf{u}$ måste vara vektorprojektionen av $\mathbf{a}$ i riktningen $\mathbf{b}$ (Adams, 10.1, Def. 4):

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} = \mathbf{a}_{\mathbf{b}} &= \big(\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{b}}\big)\, \hat{\mathbf{b}} = \left(\mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\right) \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\, \mathbf{b} \\
&= \frac{(2, 1, 1) \cdot (1, 1, 0)}{2}\, (1, 1, 0) = \frac{3}{2}(1, 1, 0) = (\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}, 0) \\
\mathbf{v} = \mathbf{a} - \mathbf{u} &= (2, 1, 1) - (\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}, 0) = (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 1)
\end{aligned}$$

(b) Låt $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 2, 3)$ och $C = (4, 5, 6)$. Vektorerna $\mathbf{u} = \vec{AB} = (1, 2, 3)$ och $\mathbf{v} = \vec{AC} = (4, 5, 6)$ är parallella med planet och då får vi en normalvektor enligt

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = (-3, 6, -3)$$

Planets ekvation kan då skrivas

$$\begin{aligned}
&n_x(x - A_x) + n_y(y - A_y) + n_z(z - A_z) = 0 \\
&-3(x - 0) + 6(y - 0) - 3(z - 0) = 0 \\
&x - 2y + z = 0
\end{aligned}$$

(c)

```
function w=kryss(u,v)
% Cross product
%
% Syntax: w=kryss(u,v)
%
% Input:   u,v - two 1x3 vectors
% Output:  w   - a vector
%
% Adams 10.3, Theorem 2

w = [ u(2)*v(3)-u(3)*v(2); u(3)*v(1)-u(1)*v(3); u(1)*v(2)-u(2)*v(1) ];
```

3. (a)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x - 1, & f(4) &= -1, \\ f'(x) &= 2x - 4, & f'(4) &= 4, \\ f''(x) &= 2. \end{aligned}$$

Linjäriseringen är, med $a = 4$,

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = -1 + 4(x - 4).$$

Felet är

$$E(x) = \frac{1}{2} f''(s)(x - a)^2 = \frac{1}{2} 2(x - 4)^2 = (x - 4)^2.$$

Det betyder att funktionen kan skrivas

$$f(x) = x^2 - 4x - 1 = -1 + 4(x - 4) + (x - 4)^2.$$

(b)

$$\begin{aligned} &\text{beräkna residualen: } b = -f(4) = 1 \\ &\text{beräkna derivatan: } a = f'(4) = 4 \\ &\text{beräkna ändringen: } h = b/a = \frac{1}{4} \\ &\text{uppdatera: } x = x + h = 4 + \frac{1}{4} = 4.25 \end{aligned}$$

(Roten är det irrationella talet $2 + \sqrt{5} = 4.2361....$)

(c) Man skriver en funktionsfil `funk.m`:

```
function y=funk(x)
y=x^2-4*x-1;
```

Sedan skriver man kommandraden:

```
>> x=newton(@funk,4,1e-6)
```

4. (a) $\lim_{x \to a} f(x) = L$ betyder att för varje $\epsilon > 0$ finns δ så dant att

$$0 < |x - a| \le \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| \le \epsilon.$$

(b)

$$\begin{aligned} \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3} &= \frac{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} \\ &= \frac{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)}{x - 9} = \sqrt{x} + 3 \to 3 + 3 = 6 \quad \text{när } x \to 9. \end{aligned}$$

Det betyder att $\lim_{x \to 9} \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3} = 6$.

(c) Liknande räkningar ger

$$\Big| \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3} - 6 \Big| = |\sqrt{x} + 3 - 6| = |\sqrt{x} - 3|.$$

Vi löser ut $x-9$ ur $|\sqrt{x}-3| \leq 10^{-6}$. Vi får

$$\begin{aligned}
& |\sqrt{x}-3| \leq 10^{-6} \\
\iff & -10^{-6} \leq \sqrt{x}-3 \leq 10^{-6} \\
\iff & 3-10^{-6} \leq \sqrt{x} \leq 3+10^{-6} \\
\iff & (3-10^{-6})^2 \leq x \leq (3+10^{-6})^2 \\
\iff & 9-6\cdot 10^{-6}+10^{-12} \leq x \leq 9+6\cdot 10^{-6}+10^{-12} \\
\iff & -6\cdot 10^{-6}+10^{-12} \leq x-9 \leq 6\cdot 10^{-6}+10^{-12} \\
\iff & -(6\cdot 10^{-6}-10^{-12}) \leq x-9 \leq 6\cdot 10^{-6}+10^{-12}
\end{aligned}$$

Den snävaste gränsen är den vänstra så vi behöver ha

$$-(6\cdot 10^{-6}-10^{-12}) \leq x-9 \leq 6\cdot 10^{-6}-10^{-12}$$

dvs $|x-9| \leq 6\cdot 10^{-6}-10^{-12}$. Vi tar δ lite mindre för att få ett enklare svar, till exempel, $\delta = 10^{-6}$. Om $|x-9| \leq \delta = 10^{-6}$ så gäller alltså

$$|\sqrt{x}-3| \leq 10^{-6}.$$

(d)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\big(1+x+\frac{1}{2}x^2+O(x^3)\big)-1-x}{1-\big(1-\frac{1}{2}x^2+O(x^4)\big)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2+O(x^3)}{\frac{1}{2}x^2+O(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{1+O(x)}{1+O(x^2)} = 1$$

5. Se kompendiet BM.

`/stig`