TMV155e Inledande matematik E, ht 05
Vecko–PM läsvecka 6

Kapitel 4.3-4.6, 4.9

4.3. Beräkning av derivator.

Deriveringsregler (Sats 4.2, 4.3): *Summa, produkt, kvot, kedjeregeln*
Derivatan av inversen. Sats (4.6)
Elementära funktioners derivator. (Satserna 4.4, 4.5 och 4.7.)
Implicit derivering.
Rekommenderade övningar:

I första hand: 4.9, 4.10, 4.11, 4.12, 4.14, 4.15, 4.16, 4.19, 4.21.
Om du hinner: 4.13, 4.20, 4.22.

4.4. Några viktiga satser om derivator.

Satsen om betydelsen av derivatans tecken. (Sats 4.8.)
Lokala extremvärden. (Sats 4.9.)
Rolles sats och medelvärdessatsen. (Satserna 4.10 och 4.11.)
Rekommenderade övningar:

I första hand: 4.23, 4.24, 4.26
Om du hinner: 4.25.

4.5. Användning av derivator

Kurvritning och max- minproblem.
Olikheter.
Antal rötter till en ekvation.

Att rita en kurva $y = f(x)$ innebär att man

- Bestämmer funktionens och derivatans definitionsmängder.
- Beräknar derivatan och undersöker hur derivatans tecken varierar. Beräkna även $f(x)$ i punkter där $f'(x) = 0$.
- Beräknar gränsvärden för funktionen i alla punkter (inklusive $\pm\infty$) som avgränsar intervallen i D_f och $D_{f'}$, eventuellt också derivatans gränsvärden.
- Undersöker om det finns asymptoter och beräknar deras ekvationer.
- Om det speciellt begärs: avgör var kurvan är strängt konvex/konkav med hjälp av f' eller f''.
- Ritar en kurva som illustrerar de slutsatser ovanstående leder till. Eventuellt kan det behövas extra stöd för ritandet genom beräkning av ytterligare funktionsvärden (t ex punkter där kurvan skär koordinataxlarna).

Rekommenderade övningar:

I första hand: 4.27, 4.28, 4.29, 4.30, 4.31a, 4.32, 4.33, 4.35, 4.36.
Om du hinner: 4.31b, 4.34, 4.37.

4.6. Derivator av högre ordning.

Betydelsen av andraderivatans tecken. (Sats 4.12.)
Konvexa och konkava funktioner. (Sats 4.13.)
Rekommenderade övningar:

I första hand: 4.38, 4.42, 4.43, 4.44.

Några extra övningar (eller frivilliga gruppövningar)

1. Bestäm värdemängden till funktionen

$$f(x) = \frac{x+1}{x}, \; x \in]0, 1].$$

   Tänk noga igenom *vad* man behöver motivera, samt *hur* man motiverar, när man bestämmer värdemängden.

2. Vilka av följande påståenden är sanna? Ge övertygande argument för era slutsatser, dvs bevis respektive motexempel.

   (a) $f(x) \to 0$ och $g(x) \to \infty$ då $x \to x_0 \Rightarrow f(x)g(x) \to 0$ då $x \to x_0$

   (b) $f(x) \to 0$ och $g(x) \to 0$ då $x \to x_0 \Rightarrow (f(x))^{g(x)} \to 1$ då $x \to x_0$

   (c) $f(x) \to \infty$ och $g(x) \to \infty$ då $x \to x_0 \Rightarrow f(x)g(x) \to \infty$ då $x \to x_0$

   (d) $f(x) \to \infty$ och $g(x) \to \infty$ då $x \to x_0 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)} \to 1$ då $x \to x_0$

   (e) $f(x) \to 0$ och $g(x) \to \infty$ då $x \to x_0 \Rightarrow (f(x))^{g(x)} \to 0$ då $x \to x_0$

3. Beräkna gränsvärdet $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(x^3+1)}{\ln(3x)} x \sin(\dfrac{1}{2x})$

4. En talföljd definieras av $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3} - 1 \end{cases}$

   Visa med induktion att $a_n < \sqrt{2}$ för alla $n > 0$.

   Visa med induktion att följden är växande.

   Bestäm $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

5. Undersök om det finns något andragradspolynom $p(x)$ sådant att

   $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^4 + 4x^3 + x^2 + x + 1} - p(x) = 0.$