Inledande Matematik för E1 (TMV156) 090117

1. **a)** Systemets totalmatris överförs via radoperationer till trappstegsform: $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \overset{RE}{\sim} \ldots \overset{RE}{\sim}$ $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ där vi ser att tredje kolonnen ej innehåller ett pivotelement; alltså är motsvarande variabel, z, fri och med $z = t$ får vi med bakåtsubstitution att $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   b) Vi har $(1-x)(x^2+x+4) \le 0 \Leftrightarrow (1-x)((x+\frac{1}{2})^2 + \frac{15}{4}) \le 0 \Leftrightarrow 1 - x \le 0 \Leftrightarrow x \ge 1$ ty $(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{15}{4} > 0$.

   c) Det gäller att $\sin(2\theta) = \sin\theta \Leftrightarrow 2\sin\theta\cos\theta = \sin\theta \Leftrightarrow \sin\theta = 0$ eller $\cos\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = n\pi$ eller $\theta = \pm\frac{1}{3+n2\pi}$. I $[0, 2\pi)$ finns då lösningarna $\theta_{1,2,3,4} = 0,\ \pi/3,\ \pi,\ 5\pi/3$.

   d) Vi söker $\frac{dy}{dt}(t)$ då $t = 4$. Då $y = x^3 - 3x + 5,\ x = \frac{\sqrt{t}}{2} + 3$ får vi m h a kedjeregeln att $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = (3x^2 - 3)\frac{1}{4\sqrt{t}}$ och $t = 4 \Rightarrow x = 4$ och $\frac{dy}{dt} = \frac{45}{8}$.

   e) **i)** $\lim_{x\to 0^+}(\sin x)(\ln x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}(x\ln x) = 1\cdot 0 = 0$, **ii)** $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(\ln x)^2} = \infty \Rightarrow \lim_{x\to 1} e^{-\frac{1}{(\ln x)^2}} = \lim_{y\to\infty} e^{-y} = 0$,

   iii) $\lim_{x\to\infty}\frac{2^x + x^{30}}{3^x + x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{3^x((\frac{2}{3})^x + \frac{x^{30}}{3^x})}{3^x(1+\frac{x^2}{3^x})} = \lim_{x\to\infty}\frac{(\frac{2}{3})^x + \frac{x^{30}}{3^x}}{1+\frac{x^2}{3^x}} = \frac{0+0}{1+0} = 0$.

   f) Vi har $f(x) = x^3 + 4x$, $\phi = f^{-1}$ så att med $y = f(x)$ gäller $\phi'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{3x^2+4}$. Då ju $f(0) = 0$ gäller $\phi'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{4}$ och då $f(-1) = -5$ gäller $\phi'(-5) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{7}$.

---

2. **a)** Planet $2x + 3y - z = 0$ har en normalvektor $n = (2, 3, -1)$ så att ett plan innehållande punkterna $\tilde{P} = (x, y, z)$ och $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ och parallellt med planet $2x + 3y - z = 0$ uppfyller $0 = n\cdot \vec{P_0\tilde{P}} = 2(x - x_0) + 3(y - y_0) - (z - z_0)$. Så med $P_0 = A$ får vi att planet Q har ekvationen $2x + 3y - z = 5$.

   b) Avståndet mellan B och planet ges av längden av projektionen av vektorn $\vec{\tilde{P}B}$ på planets normalvektor n där $\tilde{P}$ är en punkt i planet; så avståndet är $|\mathrm{Proj}_n(\vec{\tilde{P}B})| = |(\frac{n}{|n|}\cdot\vec{\tilde{P}B})\frac{n}{|n|}| = |(\frac{n}{|n|}\cdot\vec{\tilde{P}B})| = (n\cdot(\vec{OB} - \vec{O\tilde{P}}))/|n| = (n\cdot B - n\cdot\tilde{P})/|n| = |2(-2) + 3(-1) + (-1)(2) - n\cdot\tilde{P}|/\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = |2(-2) + 3(-1) + (-1)(2) - 0|/\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \frac{9}{\sqrt{14}}$; ty då $\tilde{P} = (x, y, z)$ ligger i planet gäller $n\cdot\tilde{P} = 2x + 3y + (-1)z = 0$.

   c) Linjen genom B och C har riktningsvektor $v = \vec{BC} = (1, 0, 1) - (-2, -1, 2) = (3, 1, -1)$ så linjens ekvation på parameterform är $(x, y, z) = (1, 0, 1) + t(3, 1, -1)$ som insatt i planets ekvation ger $2(1+3t) + 3t - (1-t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{10}$ och detta t-värde insatt i linjens ekvation ger skärningspunkten $\frac{1}{10}(7, -1, 11)$.

---

3. Funktionen $f(x) = \ln|x - 3| + \arctan x$ har definitionsmängd $\mathcal{D}(f) = [-1, 3)$ och är deriverbar på hela intervallet med $f'(x) = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x^2+1} = \frac{x^2+x-2}{(x-3)(x^2+1)} = \frac{(x+2)(x-1)}{(x-3)(x^2+1)}$. Vi ser att f' har ett nollställe $x = 1 \in \mathcal{D}(f)$, att $f'(x) > 0$ i $[-1, 1)$, $f'(x) < 0$ i $(1, 3)$ och $f(x) \to -\infty$ då $x \to 3$. Detta ger ett globalt maximum $f(1) = \ln 2 + \frac{\pi}{4}$. Då f är kontinuerlig får vi att f antar alla reella värden $\le f(1)$. Alltså får vi att värdemängden är $\mathcal{R}(f) = (-\infty, \ln 2 + \frac{\pi}{4}]$.

---

4. Funktionen är definierad i alla reella x utom $x = 4$ och har nollställen $x = 0$ och $x = 3$. Vidare gäller att $f(x) \to \mp\infty$ då $x \to 4^{\mp}$ så att $x = 4$ är en lodrät asymptot. Då $f(x) \to \pm\infty$ då $x \to \pm\infty$ finns inga vågräta asymptoter. För eventuella sneda asymptoter ser vi att $\frac{f(x)}{x} = \frac{x-3}{x-4} \to 1$ då $x \to \pm\infty$ och $f(x) - 1 \cdot x = \frac{x}{x-4} \to 1$ då $x \to \pm\infty$; alltså är $y = x + 1$ sned asymptot i $\pm\infty$. Derivation ger $f'(x) = \frac{(2x-3)(x-4)-(x^2-3x)}{(x-4)^2} = \frac{x^2-8x+12}{(x-4)^2} = \frac{(x-2)(x-6)}{(x-4)^2}$ så att $f'(2) = 0$ och $f'(6) = 0$ och t ex teckenstudietabell visar att $x = 2$ är ett lokalt maximum och $x = 6$ är ett lokalt minimum. Från denna information är det enkelt att rita grafen.

---

5. a) Antag att f är definierad för $I \setminus \{a\}$ där I är ett intervall runt a. Då gäller att

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ sådant att } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

b) Låt $\varepsilon > 0$ vara givet och tag $\delta = \varepsilon/3$. Då gäller att om $0 < |x - 1| < \delta$ så har vi $|3x + 1 - 4| = 3|x - 1| < 3\delta = 3(\varepsilon/3) = \varepsilon$; d v s definitionen av att $\lim_{x\to 1} 3x + 1 = 4$ är uppfylld.

c) Låt $\varepsilon > 0$ vara givet och tag $\delta = \varepsilon$. Då gäller att om $0 < |x - 0| < \delta$ så har vi $|x \sin\frac{1}{x} - 0| = |x||\sin\frac{1}{x}| \leq |x| = |x - 0| < \delta = \varepsilon$. D v s $\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ (nämligen $\delta = \varepsilon$) sådant att $0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow |x\sin\frac{1}{x} - 0| < \varepsilon$; vilket alltså är vad vi menar med att $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$.

---

6. **a)** Sant. (f två ggr deriverbar ger f' deriverbar ger f kontinuerlig (enligt sats).) **b)** Sant. (Det gäller att $\arg z^{100} = 100\arg z = 2000° = 5 \cdot 360° + 200°$. Alltså är $\operatorname{Arg} z^{100} = 200°$ och alltså gäller $\operatorname{Re}(z^{100}) < 0$.) **c)** Falskt. ($\frac{d}{dx}10^x = 10^x \ln 10$.) **d)** Falskt. (Välj t ex $f(x) = e^{-\frac{1}{(x-2)^2}}$, $g(x) = (x-2)^2$. Då är $f(x)^{g(x)} = e^{-1}$ så att då $x \to 2$ gäller $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ men $f(x)^{g(x)} \to e^{-1}$.) **e)** Falskt. (T ex $f(x) = x$ så att $f^{-1} = f$ visar att påståendet är falskt.) **f)** Sant. (Följer av att $|\sin(x + y)| = |\sin x \cos y + \cos x \sin y| \leq |\sin x||\cos y| + |\cos x||\sin y| \leq |\sin x| + |\sin y|$ ty $|\cos z| \leq 1$.)

---

7. b) Bilens hastighet får anses vara en kontinuerlig funktion av tiden. På det slutna tidsintervallet för ett kört varv har enligt max-min-satsen hastigheten ett största och ett minsta värde, säg v_{max} och v_{min}. Med medelhastigheten $\frac{6000m}{120s} = 50$m/s måste $v_{max} \geq 50$, $v_{min} \leq 50$. Om inte v är konstant 50m/s, finns alltså ett värde > 50 och ett värde < 50. Satsen om mellanliggande värde garanterar existensen av en tidpunkt med hastigheten exakt 50m/s.
