MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Inledande matematik för E1, (TMV156)
Tid: 2009-01-17, kl 08.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt: Christoffer Cromvik tel 0762- 721 860

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.

Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.

(Bonuspoäng från duggor hösten 2008 inkluderas.)

Lösningar läggs ut på kursens webbsida tidigast lördag 17/01 em.

Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Tentorna kan granskas och hämtas på MV:s exp. öppen alla vardagar 9-13.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

   a) Lös ekvationssystemet (2p)

$$\begin{cases} x - y + 4z = 0 \\ x + 2y + z = 3 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

   b) Lös olikheten $(1-x)(x^2+x+4) \leq 0$. (2p)

   c) För vilka $\theta \in [0, 2\pi)$ gäller att $\sin 2\theta = \sin\theta$? (2p)

   d) En punkt rör sig längs kurvan $y = x^3 - 3x + 5$ så att $x = \frac{\sqrt{t}}{2} + 3$, där t är tiden. Beräkna den momentana y-ändringen per tidsenhet då $t = 4$. (2p)

   e) Beräkna följande gränsvärden: (3p)

      i. $\lim_{x\to 0+} (\sin x) \ln x$ ii. $\lim_{x\to 1} e^{-\frac{1}{(\ln x)^2}}$ iii. $\lim_{x\to\infty} \frac{2^x + x^{30}}{3^x + x^2}$

   f) Funktionen $f(x) = x^3 + 4x$ är injektiv (one-to-one). Beräkna $\Phi'(0)$ och $\Phi'(-5)$ där Φ är den inversa funktionen till f. (3p)

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. Låt $A = (1, 2, 3)$, $B = (-2, -1, 2)$, $C = (1, 0, 1)$ och låt P vara planet $2x + 3y - z = 0$. (6p)

   a) Ange en ekvation för planet Q som är parallell med P och innehåller punkten A.

   b) Beräkna avståndet mellan P och punkten B.

   c) Ange skärningspunkten mellan P och linjen genom B och C.

Var god vänd!

---

3. Ange värdemängden till funktionen (6p)

$$f(x) = \ln|x-3| + \arctan x$$

då definitionsmängden begränsas till intervallet $[-1, 3)$.

4. Rita grafen till funktionen $f(x) = \dfrac{x(x-3)}{x-4}$. (6p)
Ange eventuella lokala extrempunkter och asymptoter.
(Konvexitet/konkavitet behöver inte utredas.)

5. a) Ge en precis matematisk definition av att *gränsvärdet* för en funktion $f(x)$ är L, då x närmar sig a; d v s definiera $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$. (2p)

   b) Bevisa med den i a) just givna definitionen att $\lim\limits_{x\to 1}(3x+1) = 4$. (2p)

   c) Bestäm gränsvärdet $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\dfrac{1}{x}$ och bevisa ditt påstående med den i a) just givna definitionen. (2p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

   a) Om funktionen f är två gånger deriverbar så är f' kontinuerlig.
   b) Om z är ett komplext tal sådan att $\text{Arg}(z) = 20°$, så är $\text{Re}(z^{100}) < 0$.
   c) Derivatan av 10^x är lika med $x \cdot 10^{x-1}$.
   d) Om $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} g(x) = 0$ så är $\lim\limits_{x\to 2} f(x)^{g(x)} = 1$.
   e) Om f är en injektiv och växande funktion så är f^{-1} avtagande.
   f) För alla reella tal x och y gäller att $|\sin(x+y)| \leq |\sin x| + |\sin y|$.

7. a) Formulera både *satsen om mellanliggande värde* och *Max-Min-satsen* för kontinuerliga funktioner. (3p)

   b) En Formel 1-bil kör ett varv på en 6km lång bana på exakt 2 minuter. Förklara med hjälp av satserna ovan varför bilens hastighet är exakt 50m/s någonstans på varvet. (3p)

VA