MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Inledande matematik för E1, (TMV156)
Tid: 2009-08-26, kl 08.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt: Karin Kraft tel 0762 - 72 18 61

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.
Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.
(Bonuspoäng från duggor hösten 2008 inkluderas.)
Lösningar läggs ut på kursens webbsida tidigast onsdag 26/8 em.
Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Tentorna kan granskas och hämtas på MV:s exp. öppen alla vardagar 8.30-13.00.

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

 a) Bestäm alla lösningar till ekvationssystemet (2p)

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ x + y - 2z = 2 \end{cases}$$

 b) Ge det komplexa talet $(-1+i)^{20}$ på formen $a+bi$. (2p)

 c) För vilka reella tal x är $\dfrac{|x+2|}{x-2} \geq 0$? (2p)

 d) Bestäm största och minsta värdet av funktionen $f(x) = \dfrac{2+\sin x}{3-2\sin x}$. (2p)

 e) Beräkna följande gränsvärden: (3p)

i. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin x}$ ii. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}$ iii. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^5\,2^x}{(x^4+x^2)3^x}$

 f) Funktionen $y(x)$ definieras av ekvationen $y^3 + y = x$. (3p)
 Beräkna $y(2)$, $y'(2)$ och $y''(2)$.

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. a) Ange en ekvation för det plan som är parallellt med planet $x+2y+3z=1$ och innehåller punkten $(1,2,3)$. (2p)

 b) Visa att planen $x-z=3$ och $x+y+z=1$ skär varandra och bestäm en riktningsvektor för deras skärningslinje. (2p)

 c) Finn en ekvation för det plan som innehåller skärningslinjen mellan planen $x+y-2z=6$ och $2x-y+z=2$ och har normalvektorn $(-3,3,-4)$. (2p)

Var god vänd!

3. Ange värdemängden till funktionen (6p)

$$f(x) = \ln|x - 3| + \arctan x$$

då definitionsmängden begränsas till intervallet $[-1, 3)$.

4. Rita grafen till funktionen $f(x) = 12x^5 - 15x^4 - 20x^3 + 30x^2 - 15$. (6p)
Ange eventuella lokala extrempunkter. Visa också att grafen saknar asymptoter. (Konvexitet/konkavitet behöver inte utredas.)

5. a) Ge en precis matematisk definition av att *gränsvärdet* för en funktion $f(x)$ är L, då x närmar sig a; d v s definiera $\lim_{x \to a} f(x) = L$. (2p)

   b) Bevisa med den i a) just givna definitionen att $\lim_{x \to 1}(3x + 1) = 4$. (2p)

   c) Bestäm gränsvärdet $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$ och bevisa ditt påstående med den i a) just givna definitionen. (2p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

   a) Om en funktion inte är kontinuerlig, så är den inte heller deriverbar.
   b) Funktionen $f(x) = x^3 + x + 2$ är inverterbar.
   c) Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är två vektorer i rummet, så måste vektorn $\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ vara antingen parallell med eller vinkelrät mot vektorn $\mathbf{v}$.
   d) $\arctan(\tan x) = x$ för alla x i definitionsmängden för $\tan x$.
   e) $\tan(\arctan x) = x$ för alla x i definitionsmängden för $\arctan x$.
   f) Om $|f(x)|$ är deriverbar i $x = 0$, så måste också $f(x)$ vara deriverbar i $x = 0$.

7. a) Definiera *derivatan* av en funktion f i en punkt x. (2p)

   b) Formulera och bevisa *produktregeln*, dvs räknelagen för derivering av en produkt av två funktioner. (4p)

VA