TMV156 Inledande matematik E, 2009–10–22. Lösningar.

---

1. (a) Eftersom $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 2 > 0$ är funktionen strängt växande och därför inverterbar. Genom att gissa ser vi att $x = 1$ är en rot till ekvationen $f(x) = -1$, så $f^{-1}(-1) = 1$. Alltså ger formeln för derivatan av inversen att

$$(f^{-1})'(-1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(-1))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{5+3+2} = \frac{1}{10}.$$

(b) Vi skriver först talet $z = -2-2i$ på polär form: $z = |z|e^{i\arg z} = 2\sqrt{2}e^{\frac{i5\pi}{4}}$. Alltså är $z^6 = (2\sqrt{2})^6 e^{\frac{30i\pi}{4}} = 2^9 e^{(6\cdot 2\pi + \frac{i3\pi}{2})} = 2^9 e^{\frac{i3\pi}{2}} = -512i$.

(c) Genom att göra radoperationer får vi successivt följande ekvivalenta system:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 12 \\ 2 & -3 & 1 & -7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & -3 & -1 & -21 \\ 0 & -5 & -1 & -31 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 1/3 & 7 \\ 0 & 1 & 1/5 & 31/5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 1/3 & 7 \\ 0 & 0 & -2/15 & -4/5 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 1/3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right].$$

Lösningen är alltså $(t, m, v) = (1, 5, 6)$.

(d) Eftersom funktionen är kontinuerlig så är den begränsad på varje slutet ändligt intervall. Alltså kan bara horisontella och sneda asymptoter finnas. För stora x beter sig funktionen som $\sqrt{x^2} = |x|$. Vi väntar oss därför att $y = x$ samt $y = -x$ är sneda asymptoter. Att $y = x$ är en asymptot då $x \to \infty$ beror på att

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} =$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{|x|\sqrt{1+1/x^2}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x(\sqrt{1+1/x^2}+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Eftersom x går mot oändligheten kan vi anta att x är positivt, och då är $|x| = x$. Vi måste nu göra samma sak för asymptoten $y = -x$ då $x \to -\infty$. Då gäller istället att $|x| = -x$. Vi behöver inte göra om hela beräkningen eftersom gränsvärdet faktiskt blir samma som det första:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - (-x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} - (-x) = \left[\begin{array}{c} x = -t \\ t \to \infty \end{array}\right] = \lim_{t\to\infty} \sqrt{t^2+1} - t = 0.$$

Man kan också hitta asymptoterna genom att först räkna ut $k = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x$ och $m = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - kx$.

(e) i. Funktionen kan skrivas om som $4^{-x}x^4$. Eftersom båda faktorer växer obegränsat finns det inget att undersöka. Produkten går illa kvikt mot oändligheten. Svar: ∞.

ii.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^4)}{\ln(1+x^2)} = `\tfrac{0}{0}' = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{4x^3}{(1+x^4)}}{\frac{2x}{(1+x^2)}} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^3}{2x}\frac{1+x^2}{1+x^4} = 0\frac{1+0}{1+0} = 0.$$

iii.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4^x + x^9}{9^x + x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{4^x}{9^x}\frac{1+(x^9/4^x)}{1+(x^4/9^x)} = \lim_{x\to\infty} (\frac{4}{9})^x \frac{1+(x^9/4^x)}{1+(x^4/9^x)} = 0\frac{1+0}{1+0} = 0.$$

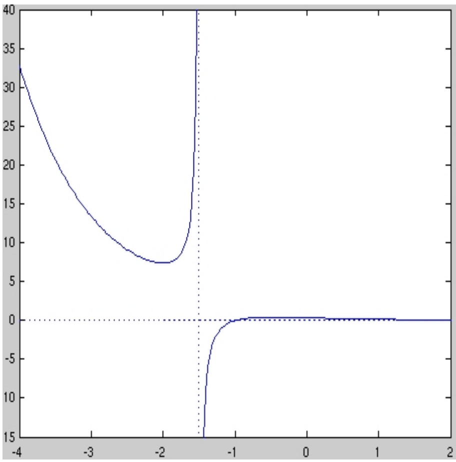
Här har vi använt satsen som säger att exponentialfunktioner växer snabbare än varje polynom ut i oändligheten och att en exponentialfunktion med ett positivt tal mindre än ett som bas går mot 0.

(f) Cirkelns ekvation är $x^2 + y^2 = 1$. Implicit derivering ger $2x + 2yy' = 0 \implies y' = -x/y = -\sqrt{3}$. Tangentens ekvation är därför

$$y - \frac{1}{2} = -\sqrt{3}(x - \frac{\sqrt{3}}{2}) = -\sqrt{3}x + \frac{3}{2}.$$

Detta kan förenklas till

$$y = 2 - \sqrt{3}x.$$



FIGUR 1. $y = \frac{x+1}{2x+3}e^{-x}$, $y = 0$ och $x = -\frac{3}{2}$

2. (a) Planet har normanvektor $n = (1, 1, 1)$ så att det sökta planet ges av $0 = n\cdot(x-1, y-2, z-3) = x-1+y-2+z-3 \Leftrightarrow x + y + z = 6$.

(b) Linjen är parallell med vektorn

$$\overrightarrow{v} = (1, 1, 0) \times (1, 0, 1) = \overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} \times \overrightarrow{e_3} = -\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_1} = (1, -1, -1).$$

Eftersom planet innehåller origo är även $\overrightarrow{u} = (1, 2, 0)$ en riktning i planet. Alltså är en normal

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u} = (2, -1, 3).$$

Detta ger att planets ekvation är $2x - y + 3z = 0$.

(c) För varje α är $x+y-z-2+\alpha(2x-y+3z-1) = 0$ ekvationen för ett plan innehållande den givna skärningslinjen ('Pencil of planes'). Välj nu α så att planet innehåller $(-1, 2, 1)$; dvs så att $-1 + 2 - 1 - 2 + \alpha(2(-1) - 2 + 3 - 1) = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1$. Insättning av α i ekvationen ger $x - 2y + 4z = -1$.

3. Definitionsmängden är $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$. Derivatan är

$$f'(x) = (-\frac{x+1}{2x+3} + \frac{2x+3-2(x+1)}{(2x+3)^2})e^{-x} = \frac{-(2x+3)(x+1)+2x+3-2(x+1)}{(2x+3)^2}e^{-x} =$$

$$= \frac{-2x^2-5x-2}{(2x+3)^2}e^{-x}.$$

Eftersom nämnaren och exponentialfunktionen är positiva så har f' samma tecken och nollställen som $p(x) = -(x^2 + \frac{5}{2}x + 1)$. De kritiska punkterna är alltså $x = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25-16}{16}} = -\frac{5}{4} \pm \frac{3}{4} \implies x = -2$ eller $x = -\frac{1}{2}$. Då $x << 0$ är $f'(x)$ negativ och f' växlar tecken när vi passerar de två kritiska punkterna. Detta ger teckentabellen

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -\frac{3}{2})$	$-\frac{3}{2}$	$(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2}, \infty)$
f'	$-$	0	$+$	ej def.	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	lok.min	$\nearrow$	ej def.	$\nearrow$	lok.max	$\searrow$

De relevanta gränsvärdena är

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to-\frac{3}{2}-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to-\frac{3}{2}+} f(x) = -\infty.$$

Vi observerar också att $f(-1) = 0$ och ritar sedan in detta. De lokala extremvärdena är $f(-2) = e^2$ och $f(-\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{e}}{4}$. Asymptoterna är $y = 0$ och $x = -\frac{3}{2}$. Det finns inga (andra) sneda asymptoter, eftersom $\lim_{x\to-\infty} f(x) - kx - m$ aldrig kan bli noll (exponentialfunktionen växer mycket snabbare än polynomen). En del av funktionens graf visas i fig 1.

4. Värdemängden är unionen av värdemängderna V_g och V_h, där $g(x) = x^2 + 1/x$ för $0 < x \leq 2$, och $h(x) = -e^{\frac{1}{4-x}}$ för $2 < x < 4$. Vi deriverar som vanligt:

$$g'(x) = 2x - 1/x^2 = (2x^3 - 1)/x^2.$$

Den enda kritiska punkten är $x_0 = 2^{-\frac{1}{3}}$. Med samma metod som i förra uppgiften kan man se att är ett globalt minimum för funktionen g (dock ej för f). Det minimala värdet är $g(x_0) = 2^{-\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}$. Eftersom $g(x) \to \infty$ då $x \to 0+$, och g är kontinuerlig ger satsen om mellanliggande värde att $V_g = [g(x_0), \infty)$. Vi upprepar förfarandet för h:

$$h'(x) = -e^{\frac{1}{4-x}}(-\frac{1}{(4-x)^2})(-1) = -\frac{e^{\frac{1}{4-x}}}{(4-x)^2} < 0.$$

Alltså är h strängt avtagande. Vi har gränsvärdena

$$\lim_{x\to 2+} h(x) = -\sqrt{e}, \quad \lim_{x\to 4-} h(x) = -\lim_{t\to\infty} e^t = -\infty.$$

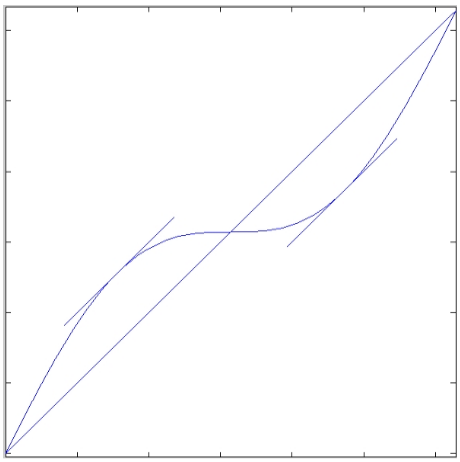
Satsen om mellanliggande värde ger nu att $V_h = (-\infty, -\sqrt{e})$.
Alltså är $V_f = (-\infty, -\sqrt{e}) \cup [2^{-\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}, \infty) = \mathbb{R} \setminus [-\sqrt{e}, 2^{-\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}})$.

5. a) Antag att f är definierad för $I \setminus \{a\}$ där I är ett intervall runt a. Då gäller att

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ sådant att } 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

b) Låt $\varepsilon > 0$ vara givet och tag $\delta = \varepsilon/3$. Då gäller att om $0 < |x-1| < \delta$ så har vi $|3x+1-4| = 3|x-1| < 3\delta = 3(\varepsilon/3) = \varepsilon$; d v s definitionen av att $\lim_{x\to 1} 3x+1 = 4$ är uppfylld.

6. (a) Sant. Antag att $x \leq y$. Då är $g(y) \leq g(x)$, vilket implicerar att $f(g(x)) \leq f(g(y))$.
(b) Falskt. En funktion kan avta mot oändligheten men ändå oscillera snabbt. Ett motexempel är $f(x) = \frac{\sin x^3}{x}$. Det är sant att $f(x) \to 0$ då $x \to \infty$ pga gränsvärdesregeln 7) på teorilistan. Derivatan är $f'(x) = \frac{3x^3\cos(x^3) - \sin x^3}{x^2}$. Den första termen är obegränsad, och den andra går mot noll. Alltså är derivatan obegränsad, och går därför inte mot noll.
(c) Falskt. Eftersom funktionen $h(u) = e^{2u}$ är strängt växande så är $g(x) = h(f(x))$ som störst då $f(x)$ är som störst, dvs $g(x)$ antar också sitt största värde då $x = 5$.
(d) Sant. Längden av kryssprodukten är produkten av de två vektorernas längder och sinus för den mellanliggande vinkeln. Detta ger att vinkeln mellan dem måste vara 0 eller π, och därför är de parallella. Förklaring nr2: Varje parallellepiped med $\overrightarrow{u}$ och $\overrightarrow{v}$ som sidor har volymen noll.
(e) Sant. Detta är sant per definition.
(f) Sant. Detta följer från medelvärdessatsen: Antag att det finns tre skärningar. Om derivatan av linjen är k så finns det två olika punkter (mellan skärningspunkterna nr1 och nr2 och mellan nr2 och nr3; fig 2) där $f' = k$. Detta är en motsägelse eftersom f är strängt växande.



FIGUR 2. Deriverbar funktion som skär en linje i tre punkter.

7. Se teorilistan (för sidhänvisning) och föreläsningsanteckningarna.

VA