Matematik Chalmers

**Tentamen i Inledande matematik för E1, TMV156, 2009–10–22**

Telefon: Ida Säfström, 0703–088304
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Tentamen omfattar 50 poäng. Maximal poäng för varje uppgift ges i marginalen. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost. Tentamen återfås i början av läsperiod 2 i samband med föreläsning i efterföljande kurs.

---

**1.** Till denna uppgift skall **endast svar lämnas in,** alltså utan motiveringar.
(a) Bestäm $(f^{-1})'(-1)$ om $f(x) = x^5 + x^3 + 2x - 5$. (2p)
(b) Skriv $(-2i-2)^6$ på formen $a + bi$. (2p)
(c) Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 2t & - & m & + & v & = & 3 \\ t & + & m & + & v & = & 12 \\ 2t & - & 3m & + & v & = & -7 \end{cases}$. (2p)
(d) Bestäm samtliga asymptoter till $f(x) = \sqrt{x^2+1}$. (2p)
(e) Beräkna följande gränsvärden:

$$\text{i)} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4}{4^x} \qquad \text{ii)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^4)}{\ln(1+x^2)} \qquad \text{iii)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{4^x + x^9}{9^x + x^4}$$

(3p)

(f) Bestäm en ekvation för tangenten till enhetscirkeln i punkten $(\sqrt{3}/2, 1/2)$. Ekvationen ska vara på formen $y = kx + m$ och vara förenklad så långt som möjligt. (2p)

**Till uppgifterna 2-5 skall fullständiga lösningar lämnas in.**

**2.** (a) Ange en ekvation för det plan som är parallellt med planet $x + y + z = 1$ och innehåller punkten $(1, 2, 3)$. (2p)
(b) Låt $L$ vara linjen genom origo som är vinkelrät mot $(1, 1, 0)$ och $(1, 0, 1)$. Bestäm en ekvation för planet som innehåller $L$ och punkten $(1, 2, 0)$. (2p)
(b) Bestäm en ekvation för det plan som innehåller punkten $(-1, 2, 1)$ samt skärningslinjen mellan planen $x + y - z = 2$ och $2x - y + 3z = 1$. (2p)

**3.** Skissa grafen av $f(x) = \frac{x+1}{2x+3}e^{-x}$, och ange funktionens lokala extrempunkter och asymptoter. Konvexitet behöver inte utredas. (6p)

**4.** Bestäm värdemängden av funktionen $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1/x & \text{om } 0 < x \leq 2 \\ -e^{\frac{1}{4-x}} & \text{om } 2 < x < 4 \end{cases}$ (6p)

**5.** a) Ge en precis matematisk definition av att *gränsvärdet* för en funktion $f(x)$ är $L$, då $x$ närmar sig $a$; d v s definiera $\lim_{x\to a} f(x) = L$. (3p)

b) Bevisa med den i a) just givna definitionen att $\lim_{x\to 1}(3x + 1) = 4$. (2p)

**Vänd!**

**6.** Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Motivering krävs ej. Rätt svar ger 1 poäng, inget svar 0 poäng och fel svar -1 poäng. Dock är 0 minsta möjliga poäng totalt. (6p)

(a) Om $f(x)$ och $g(x)$ är avtagande funktioner är $f(g(x))$ växande.
(b) Antag $f$ är deriverbar. Då gäller $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \implies \lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$
(c) Om $f(x)$ antar sitt största värde i $x = 5$ antar $g(x) = e^{2f(x)}$ sitt största värde i $x = \ln \frac{5}{2}$
(d) Om $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ och $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ men $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ så är $\overrightarrow{u}$ och $\overrightarrow{v}$ parallella.
(e) $a > b \implies a \geq b$
(f) Om $f$ är en strängt konvex funktion ($f'$ är strängt växande) på ett intervall så skär dess graf varje linje i högst två punkter.

**7.** (a) Härled formeln för ortogonalprojektion av en vektor $\vec{u}$ på en vektor $\vec{v}$. (2p)
(b) Formulera och bevisa en sats om en funktions derivata i en maximipunkt. (3p)
(c) Bevisa att deriverbarhet medför kontinuitet. (3p)

VA