Inledande matematik för E, tmv156, 100116

1) a) $x<2$, b) $f(x)=x$, c) $\frac{\pi}{8}+n\frac{\pi}{2}$, d) i) 2, ii) $1/2^3$ e) $\forall k$ om $k \neq 9$ och inga andra f) $y=1-\frac{1}{3}(x-1)=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$

2) a) $0=(1,-1,2)\cdot(a,1,1)=a-1+2 \Rightarrow a=-1$ b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$
$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) 'pencil of planes': $\alpha(x-y+2z-3)+(-x+y+z)=0 \Leftrightarrow$
$(\alpha-1)x+(1-\alpha)y+(2\alpha+1)z-3\alpha=0$ och $(x,y,z)=(1,1,1) \Rightarrow 3\alpha+1-3\alpha \Rightarrow \alpha=1$ så sökt plan $x-y+2z-3+(-x+y+z)=0 \Leftrightarrow z=1$

3) $f(t)=e^{-t}-e^{-3t}\leq M \quad \forall t\geq 0 \quad 0=f'(t)=-e^{-t}+3e^{-3t} \Rightarrow t=\frac{\ln 3}{2}$ Teckentabell

x	0		$(\ln 3)/2$	
f'		$+$	0	$-$
f		$\nearrow$		$\searrow$

$\Rightarrow f(t)\leq f\left(\frac{\ln 3}{2}\right)=\frac{2}{3\sqrt{3}}=M$

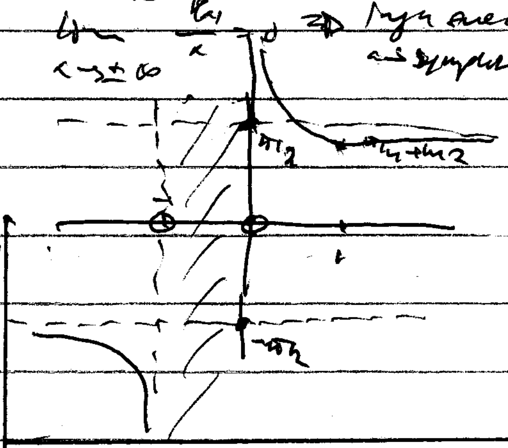
4) $D_f=\{x\in\mathbb{R}: \frac{x+1}{x}>0\}=(-\infty,-1)\cup(0,\infty) \quad f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x(x+1)(x^2+1)}$

Teckenschema

x		-1		0		1	
f'	$-$	ej def.		ej def.	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	ej def.		ej def.	$\searrow$	$\frac{\pi}{4}+\ln 2$	$\nearrow$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\pi/2$
$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=0 \Rightarrow$ inga andra asymptoter.

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty, \quad \lim_{x\to -1} f(x)=-\infty$ etc



5) a) Antag att f definierad för $I\setminus\{a\}$ där I intervall runt a. Då gäller $\lim_{x\to a} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$
$\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sådant att $0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$
b) Låt $\varepsilon>0$ vara givet och tag $\delta=\varepsilon/3$. Då gäller att om $0<|x-1|<\delta$ så har vi $|3x+1-4|=3|x-1|<3\delta=3(\varepsilon/3)=\varepsilon$; dvs definitionen av att $\lim_{x\to 1} 3x+1=4$ är uppfylld

6) a) F b) F c) S d) F e) S ($f'>0$ ~~och~~ $\lim_{x\to\pm\infty} f=\pm\infty \Rightarrow$ precis 1 rot i båda fallen), f) medelvärdessatsen ger ett $\exists\,\xi$ s.a.
$f'(\xi)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{-1-1}{2}=-1$ så F).

7) Se hors-boken för beviset