Matematik Chalmers

Tentamen i Inledande matematik för E1, TMV156, 2010–01–16

Telefon: Aron Lagerberg, 0703–088304
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Tentamen omfattar 50 poäng. Maximal poäng för varje uppgift ges i marginalen. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Resultat meddelas per epost.

---

1. Till denna uppgift skall **endast svar lämnas in,** alltså utan motiveringar.
(a) Bestäm alla rella tal x sådana att

$$\frac{x^2+2x+2}{2-x} \geq 0$$

(2p)
(b) Ge ett exempel på en begränsad funktion definierad på $[0,1)$, som saknar största värde. (2p)
(c) Finn de reella tal x sådana att $2\sin x\cos x = 1 - 2\sin^2 x$. (2p)
(d) Beräkna följande gränsvärden:

$$\text{i)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^{2x}-e^x)}{x} \qquad \text{ii)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\tan^3 2x}$$

(2p)

(e) För vilka reella tal h och k har ekvationssystemet $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 3 & h & k \end{array}\right)$ en unik lösning. (3p)

(f) Bestäm en ekvation för tangenten i punkten $(x,y) = (1,1)$ till kurvan $y = y(x)$ som ges av $\sqrt{x} + y + \sqrt{y} = 3$. (3p)

Till uppgifterna 2-5 skall fullständiga lösningar lämnas in.

2. (a) Bestäm $a \in \mathbb{R}$ så att planen $x - y + 2z = 3$ och $ax + y + z = 0$ är vinkelräta. (2p)
(b) Finn för de vinkelräta planen i a), en parametrisering av skärningslinjen mellan planen. (2p)
(c) Bestäm en ekvation för det plan som innehåller skärningslinjen i b) och punkten $(1,1,1)$. (2p)

3. Ange det minsta reella tal M sådant att

$$e^{-2t} - e^{-4t} \leq Me^{-t}, \qquad \forall t \geq 0.$$

(6p)

4. Rita grafen till funktionen $f(x) = \arctan x + \ln(\frac{x+1}{x})$. (Konvexitet/konkavitet behöver inte utredas.) (6p)

5. a) Ge en precis matematisk definition av att *gränsvärdet* för en funktion $f(x)$ är L, då x närmar sig a; d v s definiera $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$. (3p)

b) Bevisa med den i a) just givna definitionen att $\lim\limits_{x\to 1}(3x+1) = 4$. (2p)

Vänd!

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Motivering krävs ej. Rätt svar ger 1 poäng, inget svar 0 poäng och fel svar -1 poäng. Dock är 0 minsta möjliga poäng totalt. (6p)

(a) Det komplexa talet $2-3i$ har realdel 2 och imaginärdel $3i$.
(b) Lösningarna mellan 0 och 2π till $2\sin x\cos x = 1-2\sin^2 x$ är $x=\frac{\pi}{8}$ och $\frac{9\pi}{8}$.
(c) Funktionen $f(x)=\frac{\ln(x-1)-x}{x^2}$ är en kontinuerlig funktion.
(d) Låt $f(x)=x^{\sqrt{x}}$. Då är $f'(1)=\frac{1}{2}$.
(e) Antalet rötter till $x^{101}+x^{51}+x-1=0$ är lika med antalet rötter till $x^{99}+x^{49}+x-3=0$.
(f) Det finns en funktion f sådan att $f(0)=1,\ f(2)=-1$ och $f'(x)>1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

7. (a) Definiera *derivatan* av en funktion f i en punkt x. (2p)
(b) Bevisa med derivatans definition att $\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$. (3p)
(c) Bevisa att deriverbarhet medför kontinuitet. (2p)

VA