TMV156 Inledande matematik E, 2010–08–25. Lösningar.

---

1. (a) Svar: $|z| = 1$. Alla komplexa tal med absolutbelopp 1 är på formen $\cos v + i \sin v$ (och omvänt alla sådana tal har absolutbelopp 1).
(b) Svar: $(x, y, z) = (-8, 7, -12)$.
(c) Svar: Alla konstanta funktioner. Det är klart att dessa har derivatan 0. Det följer från medelvärdessatsen att en funktion vars derivata är 0 måste vara konstant.
(d) Svar: Sned asymptot $y = x$ och vertikal asymptot $x = 0$. För att finna den sneda asymptoten räcker det att observera att $f(x)$ är summan av $1/x$ och x, där den ena termen har gränsvärdet noll och den andra är en linjär funktion. Alternativt kan man beräkna $k = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x$, och sedan $m = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx)$. Eftersom båda dessa gränsvärden existerar så är $y = kx + m = x$ en asymptot.
(e) i. Svar: 0. Gränsvärdet är noll eftersom $\sin x^2$ är begränsad och $1/x \to 0$.
ii. Svar: Existerar inte. Vi måste först beräkna $f'(x)$, som är

$$f'(x) = 2\cos x^2 - \frac{\sin x^2}{x^2}.$$

Den andra termen har gränsvärde noll enligt resonemanget i den första deluppgiften. Den första termen pendlar oändligt många gånger mellan -1 och 1. Alltså pendlar $f'(x)$ också nära -1 och 1 oändligt många gånger. Denna funktion inget gränsvärde, ty om det hade funnits, så skulle grafen stabiliseras kring gränsvärdet.
iii. Svar: 1. Funktionen är en produkt av $x + 1$ och $\frac{x}{\ln(1+x)}$. Den första har gränsvärdet 1 och det har även den andra (detta är ett standardgränsvärde). Produkten av dessa två gränsvärden blir alltså $1 \cdot 1 = 1$.
(f) Svar: $x \geq 3$. Ekvationen kan tolkas som " avståndet mellan x och 1 är större än eller lika med avståndet mellan x och 5 ". Detta gäller om x ligger på medelpunkten mellan 1 och 5 på tallinjen eller till höger om denna. Medelpunkten är $(1 + 5)/2 = 3$.

2. (a) Svar: $\{t(-b, a) : t \in \mathbb{R}\}$. Vi använder oss av skalärprodukten: (x, y) är vinkelrät mot (a, b) omm $(x, y) \cdot (a, b) = ax + by = 0$. En lösning till denna ekvation är $(x, y) = (-b, a)$. Alla andra lösningar bildar en linje parallell med denna dvs $(x, y) = t(-b, a)$ där $t \in \mathbb{R}$.
(b) Vi måste lösa evkationssystemet som består av ekvationerna $x + 2y + z = 4$ och $2x + 4y - 3z = 13$. Genom radoperationer får vi det ekvivalenta systemet som består av $x + 2y = 5$ och $z = -1$. Vi har y som fri variabel och får då lösningen $(x, y, z) = (5 - 2t, t, -1)$.
(c) Svar: Volymen är 1. Volymen kan beräknas med hjälp av determinanten som

$$V = \left\| \begin{array}{ccc} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right\| = |-1| = 1.$$

3. (a) Svar: $1 - a$, antas i $x = 1$. Derivatan är $f'(x) = -(1/x^2 + a)$, vilket är strängt negativt för alla $x > 0$. Alltså är funktionen strängt avtagande, så den antar sitt minimum i den högra ändpunkten $x = 1$, och där är funktionsvärdet $f(1) = 1 - a$.
(b) Svar: $a = 1$ är det största värdet. Funktionen är konvex om $g''(x) \geq 0$ på intervallet. Vi har att $g''(x) = 1/x - ax$, dvs samma funktion som i (a). Denna funktion är ickenegativ omm dess minimum är ickenegativt. Alltså omm $1-a \geq 0$.

4. Vi kan t.ex. börja med att bestämma sneda asymptoter. Det enklaste sättet är att utföra polynomdivision. Vi får då

$$\frac{x^2 + 1}{x + 1} = x - 1 + \frac{2}{x + 1}.$$

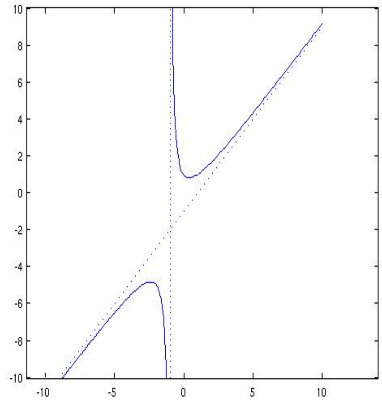
Därför är $y = x - 1$ en sned asymptot, ty den andra termen är en rest term som har gränsvärdet noll i oändligheten. Man kan också använda den vanliga metoden att bestämma k och m.
Nämnaren $x + 1$ ger upphov till en vertikal asymptot $x = -1$. Eftersom $x^2 + 1$ alltid är positivt och $x + 1$ växlar tecken då vi passerar den vertikala asymptoten ser vi att $\lim_{x\to-1^+} f(x) = \infty$ och $\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$. Vi ritar in detta i grafen och kontrollerar sedan att det verkar stämma överens med eventuella extrempunkter.
Vi beräknar nu derivatan $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{2x(x + 1) - (x^2 + 1)}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x + 1)^2}.$$

Nämnaren ovan är alltid positiv, så täljaren avgör tecken för funktionen (och därmed på vilka intervall funktionen växer och avtar). Vi faktoriserar nu nämnaren genom att lösa ekvationen $x^2 + 2x - 1 = 0$, vilket ger

$$x^2 + 2x - 1 = (x + 1 + \sqrt{2})(x + 1 - \sqrt{2}).$$

En teckentabell visar att $f(x)$ är växande på $(-\infty, -1 - \sqrt{2})$, avtar sedan mellan $-1 - \sqrt{2}$ till $-1 + \sqrt{2}$ och växer slutligen på $(-1 + \sqrt{2}, \infty)$. Alltså är $-1 - \sqrt{2}$ en lokal maxpunkt och $-1 + \sqrt{2}$ en lokal minpunkt. Detta är konsistent med sättet som grafen närmar sig den vertikala asymptoten. Nedan finns en icke skalenlig plot från matlab.



FIGUR 1. $y = \frac{x^2+1}{x+1}$, $x = -1$ och $y = x - 1$

5. a) Antag att f är definierad för $I \setminus \{a\}$ där I är ett intervall runt a. Då gäller att

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ sådant att } 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

b) Låt $\varepsilon > 0$ vara givet och tag $\delta = \varepsilon/3$. Då gäller att om $0 < |x-1| < \delta$ så har vi $|3x+1-4| = 3|x-1| < 3\delta = 3(\varepsilon/3) = \varepsilon$; d v s definitionen av att $\lim_{x\to 1} 3x+1 = 4$ är uppfylld.

6. (a) Falskt. Ett enkelt motexempel som visar att detta är falskt: $f(x) = x$. Inversen $f^{-1}(y) = y$ är strängt växande! Vi kan även visa att inversen alltid är strängt växande: Antag att $y_1 < y_2$ och att $f^{-1}(y_1) = x_1$ och $f^{-1}(y_2) = x_2$. Vi vill visa att $x_1 < x_2$. Vi har per definition att $f(x_1) = y_1$ och $f(x_2) = y_2$. Om det vore sant att $x_1 \geq x_2$ så vore $y_1 \geq y_2$ eftersom f är str. växande. Alltså måste $x_1 < x_2$.
(b) Falskt. Bara på de intervall där funktionen är injektiv. Man inser att detta inte gäller för alla angivna intervall lättast genom att föreställa sig sinus graf. Funktionen upprepar värden två gånger på (korta) intervall som innehåller en top eller en dal.
(c) Sant. Algebrans fundamentalsats ger att det finns tre komplexa rötter om man räknar multiplicitet. Vi har visat i kursen att ickereella rötter till ekvationer med reella koefficienter förekommer i konjugerade par (t.ex. $4+3i$ och $4-3i$). Alltså är antalet reella rötter udda, och därför ej noll. Man kan även sluta sig till lösningen med hjälp av satsen om mellanliggande värde, ty ett tredjegradspolynom har gränsvärdena $\pm\infty$ då $x \to -\infty$ resp. $x \to \infty$. Detta ingick i en av datorlabbarna.
(d) Falskt. Lagen som liknar denna lyder $\ln(a^b) = b \ln a$. Det är klart att $x^b = bx$ inte kan gälla i allmänhet.
(e) Sant. Om påståendet $\lim_{x\to a} f(x) = L$ hade varit sant så hade $|f(x) - L| < \epsilon$ gällt för godtyckligt ϵ och tillräckligt litet δ. Detta leder till motsägelse om $\epsilon < 1$, för $|f(x) - L|$ kan inte både vara större och mindre än 1 samtidigt. Alltså måste $\lim_{x\to a} f(x) = L$ vara falskt, så (e) är sann.
(f) Falskt. Vi vet bara att f'' är positiv, f' kan mycket väl vara negativ. Tag t.ex. $f(x) = x^2 - 100x$. Denna funktion är konvex överallt, men den är avtagande på $(-\infty, 50)$.

7ab. Se teorilistan (för sidhänvisning) och föreläsningsanteckningarna.

7c. Antag att $b > a$. Vi vill se att $f(b) > f(a)$, dvs att $f(b) - f(a) > 0$. Enligt medelvärdessatsen får vi att $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$ för något c mellan a och b. Både $b - a$ och $f'(c)$ är positiva enligt våra antaganden, så vi är klara.