Lösningar till tentamen E, Inledande Analys, TMV156, 2010-10-23.

1) **(a)** Teckenstudietabell

x		3		5	
$x-5$	$-$		$-$	0	$+$
$3-x$	$+$	0	$-$		$-$
$\frac{x-5}{3-x}$	$-$	ej def.	$+$	0	$-$

ger $x \in (3,5]$. **(b)** Systemets utökade matris $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right)$ är via radoperationerna $R_3 \mapsto R_3 - 2R_1$, $R_3 \mapsto R_3 + 5R_2$ radekvivalent med trappstegsformen $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$, där den sista raden lyder $0 = 2$; en motsägelse, som innebär att systemet ej har lösning. **(c)** Linjen $x = 3$ är en lodrät asymptot. När $x \to \pm\infty$ så går $\frac{1-x}{(x-3)^2} \to 0$, som innebär att linjen $y = 2x - 3$ är en sned asymptot. **(d)** Kalla vinkeln över horisonten för θ och ballongens höjd för h. Båda dessa är funktioner av tiden. Vi söker dh/dt i det ögonblick då $\theta = \pi/4$. Det är också givet att $d\theta/dt = 0.025 = 1/40$. Från geometrin ser vi att förhållandet mellan h och θ är $\tan\theta = \frac{h}{100} \Rightarrow h = 100\tan\theta$. Derivation m.a.p. t ger $\frac{dh}{dt} = 100\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}$. Insättning vid $\theta = \pi/4$ ger alltså $\frac{dh}{dt} = 100(\sqrt{2})^2\frac{1}{40} = 5\ m/s$. **(e)** **(i)** Gränsvärdet är noll. Exponentialen i nämnaren slår polynomet och logaritmen i täljaren. **(ii)** Omskrivningen $\frac{4x+\sin x}{2x+\sin x} = \frac{x(4+(\sin x/x))}{x(2+(\sin x/x))} = \frac{4+(\sin x/x)}{2+(\sin x/x)}$ och gränsvärdet $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ ger att gränsvärdet är $\frac{5}{3}$. **(iii)** Här använder vi gränsvärdet $e = \lim_{\theta\to\infty}\left(1+\frac{1}{\theta}\right)^\theta$. Vi skriver om uttrycket som $\left[\left(1+\frac{1}{x/5}\right)^{x/5}\right]^{10}$, och därmed ses att gränsvärdet är e^{10}. **(f)** Kom ihåg att, för $x \in [-1,1]$, $\arccos(x) =$ den unika vinkel $\theta \in [0,\pi]$ sådan att $\cos\theta = x$. Per definition av $f(x)$ har vi i stället, för $x \in [-1,1]$, att $f^{-1}(x) =$ den unika vinkel $\psi \in [\pi, 2\pi]$ sådan att $\cos\psi = x$. Eftersom $\psi = 2\pi - \theta$ så måste $f^{-1}(x) = 2\pi - \arccos(x)$.

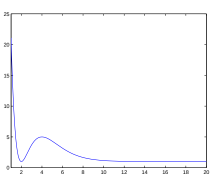
2) **(a)** De två planen ger ett linjärt ekvationssystem $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right)$ som via radoperationen $R_2 \mapsto R_2 - 2R_1$ ger trappstegsformen $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$. Här är $z \equiv t$ en fri variabel, $y = -1$ och $x - (-1) + z = 2 \Rightarrow x = 1 - z$; så lösningsmängden är en linje L som ges i parameterform av $L = \{(1,-1,0) + t(-1,0,1) : t \in \mathbb{R}\}$. **(b)** Vi använder formeln $\dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ för avståndet mellan punkten (x_0, y_0, z_0) och planet $ax + by + cz = d$. Här är $(x_0, y_0, z_0) = (4,2,6)$ och $a = 2, b = -1, c = 2, d = 3$. Insättning ger att avståndet är $\dfrac{|2(4) - 1(2) + 2(6) - 3|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \dfrac{15}{\sqrt{9}} = 5$. **(c)** Normalen till planet har riktningen $2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$. En enhetsvektor i denna riktning är $\hat{n} = \dfrac{2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \dfrac{1}{3}(2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k})$. Den punkt P i planet som ligger närmast $(4,2,6)$ är den punkt som är 5 längdenheter bort från $(4,2,6)$ längs normalen $\hat{n}$. Vi vet inte om vi ska gå 'upp' eller 'ner' längs den givna normalen för att hamna i planet, så det finns två möjligheter för P; $(4,2,6) \pm \dfrac{5}{3}(2,-1,2)$ där minustecken ger $\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, \frac{8}{3}\right)$ som genom insättning i planets ekvation visar sig ligga i planet och alltså är den sökta punkten.

3) Funktionen $f(x) = (x-2)^2e^{4-x} + 1$ är definierad för alla x med derivatan $f'(x) = 2(x-2)e^{4-x} + (x-2)^2e^{4-x}\cdot(-1) = e^{4-x}(x-2)(2-(x-2)) = e^{4-x}(x-2)(4-x)$ Vi beräknar också andraderivatan, efter förenkling på samma sätt får vi $f''(x) = (x^2 - 8x + 14)e^{4-x} = (x - (4-\sqrt{2}))(x - (4+\sqrt{2}))e^{4-x}$ Vi gör en teckentabell för både första- och andraderivatan för att få en överblick:

x	$-\infty$		2		$4-\sqrt{2}$		4		$4+\sqrt{2}$		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f''(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	1	$\nearrow$		$\nearrow$	5	$\searrow$		$\searrow$	1

Ur tabellen utläser vi av derivatans teckenväxlingar att f har ett lokalt minimum i $x = 2$ och ett lokalt maximum i $x = 4$. Andraderivatans tecken ger att grafen är konvex (concave up) i intervallet $(-\infty, 4-\sqrt{2})$ och i $(4+\sqrt{2}, \infty)$ samt konkav (concave down) i $(4-\sqrt{2}, 4+\sqrt{2})$.

Vidare, eftersom $f(x) = (x-2)^2e^{4-x} + 1 = \frac{(x-2)^2}{e^{x-4}} + 1$ så ser vi att $f(x) \to 1$ då $x \to \infty$ (exp-funktionen växer snabbast). Därmed är $y = 1$ en asymptot till grafen. Åt andra hållet har vi dels att $f(x) \to \infty$ då $x \to -\infty$, dels: $\frac{f(x)}{x} = \frac{(x-2)^2}{x}e^{4-x} + \frac{1}{x} \to -\infty$ då $x \to -\infty$ eftersom den rationella funktionen och exponentialfunktionen i första termen går mot $-\infty$ respektive ∞. Därmed ingen asymptot åt det hållet, och ingen lodrät asymptot. Nu kan vi rita grafen :



Sammanfattningsvis: Vågrät asymptot: $y = 1$, lokalt minimum: $x = 2$, lokalt maximum: $x = 4$. Konkav i intervallet $(4-\sqrt{2}, 4+\sqrt{2})$, konvex i de återstående intervallen.

4) **(a,b)** Först notera vad som händer runt punkterna $x = \pm 1$, där f byter form: $\lim_{x\to -1^-} f(x) = f(-1) = 3(-1)^2 + \ln(1) = 3$, $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 4(-1) + \cos(-\pi) = -5$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 4(1) + \cos(\pi) = 3$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 1e^0 - 6 = -5$. Vi kan derivera styckvis och konstatera att $f'(x) = \begin{cases} 6x + 1/x, & \text{då } x < -1, \\ 4 - \pi\sin(\pi x), & \text{då } -1 < x < 1, \\ (1-x)e^{1-x}, & \text{då } x > 1. \end{cases}$ Alltså är $f(x) < 0$ både när $x < -1$ och när $x > 1$, medans $f(x) > 0$ när $-1 < x < 1$. Så nu vet vi ungefär hur funktionen ser ut: 1. $f(x)$ är strängt avtagande då $x \in (-\infty, -1]$ och minskar från $+\infty$ till 3. 2. $f(x)$ är strängt växande då $x \in (-1, 1)$ och ökar från -5 till 3. Notera att ändvärdena antas inte. 3. $f(x)$ är strängt avtagande då $x \in [1, \infty)$ och minskar från -5 till $-\infty$. Då $f(x)$ aldrig antar samma värde vid olika x-värden innebär det dessutom att f är injektiv och därmed inverterbar.
(c) Vi har den allmänna formeln $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$. Här är $x = 1$. Per definition, $f^{-1}(1) =$ det unika t sådan att $f(t) = 1$. Man ser direkt att $f(0) = 4(0) + \cos(0) = 1$, så $t = 0$. Insättning i (2) ger nu att $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)}$. Från (1) ser vi att $f'(0) = 4 - \pi\sin(0) = 4$, så $(f^{-1})'(1) = 1/4$ som är det sökta svaret.

5) **a)** Antag att f är definierad för $I \setminus \{a\}$ där I är ett intervall runt a. Då gäller att

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ sådant att } 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

b) Låt $\varepsilon > 0$ vara givet och tag $\delta = \min[1, \varepsilon/5]$. Vi vill uppskatta $|x^2 - 4| = |(x+2)(x-2)| = |x+2||x-2|$. Om nu $|x-2| < \delta$ så gäller alltså $|x-2| < \delta \le 1$ som ger att $1 < x < 3 \Rightarrow 3 < x+2 < 5 \Rightarrow |x+2| < 5$. Alltså gäller för givet $\varepsilon > 0$ att vi kan ta $\delta = \min[1, \varepsilon/5]$ och då gäller med detta val av δ att om $|x-2| < \delta$ så har vi att $|x^2-4| = |(x+2)(x-2)| = |x+2||x-2| < 5|x-2| < 5\delta \le 5(\varepsilon/5) = \varepsilon$; d v s definitionen av att $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$ är uppfylld.

6) **(a)** FALSKT. I polär form är

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}.$$

Från De Moivres sats härleder vi att

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{93} = \cos\frac{93\pi}{4} + i\sin\frac{93\pi}{4}.$$

Men $93/4 = 11 \cdot 2 + 5/4$ så

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{93} = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right).$$

(b) SANT. Låt $z = \cos\theta + i\sin\theta$, så

$$z^9 = \cos 9\theta + i\sin 9\theta = -1 = \cos\pi + i\sin\pi,$$

som medför att

$$\theta = \frac{\pi}{9} + \left(\frac{2\pi}{9}\right)n, \quad n = 0,1,2,3,4,5,6,7,8.$$

Den reella delen av z blir positiv om och endast om θ ligger i den första eller den fjärde kvadranten. Den ligger i den första kvadranten för $n = 0, 1$ och i den fjärde kvadranten för $n = 7, 8$.
(c) FALSKT. Ty $\sin\theta \le 1$ för alla $\theta \in \mathbb{R}$ så kan VL aldrig överstiga 6. Så ekvationen har faktiskt inga lösningar alls.
(d) FALSKT. T.ex. tag $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$ och $a = 0$. Då gäller att $\lim_{x\to 0} |f(x)| = 1$. Men $\lim_{x\to 0} f(x)$ existerar ej, ty $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +1$ medan att $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$.
(e) SANT. Låt θ vara vinkeln mellan $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$. Då har vi att

$$\begin{aligned} ||\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|| &= ||\boldsymbol{a}||||\boldsymbol{b}|| \sin\theta, \\ \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= ||\boldsymbol{a}||||\boldsymbol{b}|| \cos\theta. \end{aligned}$$

Därför är

$$||\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}||^2 + (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 = ||\boldsymbol{a}||^2||\boldsymbol{b}||^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = ||\boldsymbol{a}||^2||\boldsymbol{b}||^2.$$

(f) SANT. Vi tillämpar Rolle sats tre gånger. Eftersom f är deriverbar och $f(0) = f(1) = 0$ så måste det finnas $c_1 \in (0,1)$ sådan att $f'(c_1) = 0$. På samma sätt, eftersom $f(1) = f(2) = 0$ måste det finnas $c_2 \in (1,2)$ sådan att $f'(c_2) = 0$. Men f har andraderivata, dvs f' är också deriverbar. Eftersom $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$ så måste det finnas $c \in (c_1, c_2)$ sådan att $f''(c) = 0$, v.s.v.

7) **(a)** Definition 4, sid 99 i Adams. **(b)** Sats 9, sid 121 i Adams. Man använder sats 8 inklusive exempel 1 i beviset, men dessa i sig behöver inte bevisas.