MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Inledande matematik för E1, (TMV156)
Tid: 2011-10-22, kl 08.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: Hossein Raufi tel 0703-088304

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.
Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.
(Bonuspoäng från hösten 2011 inkluderas.)
Lösningar läggs ut på kursens webbsida tidigast 24/10.
Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående granskning, se kursens hemsida www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv156/1112/

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

   a) Lös ekvationen $|x-2| = 4$. (2p)

   b) Derivera funktionen $f(x) = \ln(x^2+1)$. (2p)

   c) Bestäm alla lösningar till ekvationssystemet (2p)
   $$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x + 2y - z = 4 \\ 2x + y + z = 5 \end{cases}$$

   d) Bestäm $\cos(\arcsin(-\frac{5}{6}))$. (2p)

   e) Beräkna följande gränsvärden: (3p)
   $$\alpha)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} \qquad \beta)\quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 5x}{x^2} \qquad \gamma)\quad \lim_{x\to\infty} x(\arctan x - \frac{\pi}{2})$$

   f) Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan (3p)
   $$\frac{y^3}{x} + x^2 y = -4$$
   i punkten $(-2,-2)$. I närheten av denna punkt är kurvan grafen till en funktion $y(x)$.

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. a) Ett plan innehåller den räta linjen $\dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{1}$ och punkten $(3,-1,-2)$. Bestäm en ekvation för planet. (4p)

   b) Ligger punkten $(1,2,3)$ i planet? Motivera ditt svar. (1p)

   c) Är linjen $(x,y,z) = (1+t, 2-4t, 3+3t)$ vinkelrät mot planet? Motivera ditt svar. (1p)

3. a) Visa att funktionen $f(x) = x^7 + x^5 + 3$ är inverterbar. (3p)

   b) Beräkna $(f^{-1})'(5)$. (3p)

4. Rita grafen till funktionen $f(x) = \ln(1-2x) + 2\arctan x$. Ange speciellt funktionens definitionsmängd och värdemängd, eventuella lokala extrempunkter och asymptoter. (Du behöver inte utreda konvexitet/konkavitet). (6p)

Var god vänd!

---

5. a) Ge en precis matematisk definition av att *gränsvärdet* för en funktion $f(x)$ är L, då x närmar sig a; d v s definiera $\lim_{x \to a} f(x) = L$. (2p)

   b) Bevisa med den i a) just givna definitionen att $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$. (4p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

   a) Alla lösningarna till en ekvation av typen $z^3 = a$ (där $a \neq 0$ är ett givet komplext tal) kan ligga i samma kvadrant av det komplexa talplanet (Argand-diagrammet).

   b) Funktionen $f(x) = x \ln x$ är konvex (=concave up) för $x > 0$.

   c) Olikheten $\ln(1 + x) \leq x$ är sann för alla reella tal $x > -1$.

   d) En kontinuerlig funktion f kan ha definitionsmängden $\mathcal{D}_f = [0, 1]$ och värdemängden $\mathcal{V}_f = (0, 1)$.

   e) För funktionen $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 20x$ finns det åtminstone en punkt $c \in (1, 2)$ med $f'(c) = 9$.

   f) Funktionerna $f(x) = \ln\Big((x-2)(x-5)\Big)$ och $g(x) = \ln(x-2)+\ln(x-5)$ har *inte* samma definitionsmängd.

7. a) Definiera *derivatan* av en funktion f i punkten x. (2p)

   b) Bevisa att om f är deriverbar i intervallet (a, b) och i detta intervall har sitt största värde i punkten c, så är $f'(c) = 0$. (4p)