Lösningar till Inledande matematik för E1, (TMV156) 2012-08-29

1. **a)** $\dfrac{18^{21}\cdot 420^{18}}{30^{18}\cdot 2^{16}\cdot 126^{15}\cdot 7^3\cdot 2^8\cdot 3^{11}} = \dfrac{2^{21+2\cdot 18}\cdot 3^{42+18}\cdot 5^{18}\cdot 7^{18}}{2^{18+16+15+8}\cdot 3^{18+2\cdot 15+11}\cdot 5^{18}\cdot 7^{15+3}} = 2^{21+36-57}\cdot 3^{60-59}\cdot 5^{18-18}\cdot 7^{18-18} = 3$, **b)** f ej omvändbar så saknar invers , **c)** $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & a & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & a-4 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1 \end{array}\right)$ visar att endast $a=1$ ger ett ekvationssystem som saknar lösningar, **d)** $\sin|\dfrac{x+5}{3-x}| \geq 2\cos\dfrac{\pi}{6} = 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} > 1$ ger att det inte finns lösningar, **e)** $f'(x) = e^{\sin^2 x}\dfrac{d}{dx}(\sin^2 x) = e^{\sin^2 x}(2\sin x\dfrac{d}{dx}(\sin x)) = 2\sin x\cos x e^{\sin^2 x} = \sin 2x e^{\sin^2 x}$, **f)** (i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x} = 2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x} = 2\cdot 1 = 2$, (ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+\sin x}{x-2\ln|x|} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{x}(2+\frac{\sin x}{x})}{\cancel{x}(1-\frac{2\ln|x|}{x})} = \dfrac{2+0}{1-0} = 2$, (iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^2} =$ l'Hopital $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\tan^2 x - 1}{2x} =$ l'Hopital $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\tan x(1+\tan^2 x)}{2} = 0$

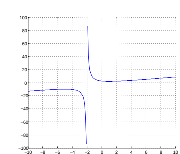
2. a) Planet $x+y-z=2$ har normal $n=(1,1,-1)$. Linjen genom $P_1=(1,0,-1)$ och $P_2=(0,1,1)$ har riktningsvektor $v = \overrightarrow{P_1P_2} = (1,-1,-2)$. Normalen n_π för det sökta planet π är alltså ortogonal mot n och v och alltså gäller t ex att $n_\pi = -\begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -(-3,1,-2) = (3,-1,2)$ så att det sökta planet π har ekvation $3x-y+2z=D$ för ngt reellt tal D. Insättning av en punkt i planet, t ex P_1, ger $D=1$. Alltså är ekvationen för det sökta planet $3x-y+2z=1$. b) Den sökta linjen ℓ har som riktningsvektor normalen n. Alltså är på parameterform ekvationen för linjen $(x,y,z)=(1,2,1)+t(1,1,-1)$, där $t\in\mathbb{R}$. c) Insättning av koordinaterna (x,y,z) för linjen ℓ i ekvationen för planet π ger en likhet som inte beror på t och som inte är sann; alltså finns det ingen punkt på linjen ℓ som också ligger i planet π. Detta inser vi ju också direkt ty linjen ℓ är parallell med planet π så linjen ligger antingen helt i planet eller helt utanför planet och då punkten $(1,2,1)$ på linjen ej ligger i planet så kan alltså aldrig linjen skära planet.

3. Definitionsmängden för f är $\mathbb{R}\setminus 0$. Då $f'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{x^2(1+x^2)}>0$ är funktionen alltid strängt växande. Vidare är $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1+\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1-\frac{\pi}{2}$. Alltså är $V_f = \mathbb{R}\setminus[1-\frac{\pi}{2}, 1+\frac{\pi}{2}]$.

4. Vi noterar att $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. Polynomdivision eller omskrivning $f(x)=\frac{(x+2-2)^2+5}{x+2}=\frac{(x+2)^2+4-2\cdot 2(x+2)+5}{x+2}=\frac{(x+2-4)(x+2)+9}{x+2}=x-2+\frac{9}{x+2}$ ger och vi ser att linjen $y=x-2$ är asymptot både i $+\infty$ och $-\infty$. Vidare är $\lim_{x\to-2^-} f(x)=-\infty$ och $\lim_{x\to-2^+} f(x)=+\infty$. Vidare $f'(x)=1-9\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{(x-1)(x+5)}{(x+2)^2}$. Teckenstudietabell

x		-5		-2		1	
f'	$+$	0	$-$	*ej def*	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	-10	$\searrow$	*ej def*	$\searrow$	2	$\nearrow$

ger en graf som i figuren:



5. Låt den stora konen ha sin spets på positiva y-axeln och basens centrum i origo. Skärningen mellan xy-planet och stora konen beskrivs av linjen ℓ given av $y=-\frac{H}{R}x+H$. För den lilla konen gäller att för en given höjd h så är volymen maximal då lilla konen uppfyller att dess basradie r ges som x-koordinaten för punkten (x,y) på linjen ℓ där $y=h$; dvs $r=x(h)=\frac{R}{H}(H-h)$. Alltså är volymen för den lilla konen $V(h)=\frac{\pi r^2 h}{3}=\frac{\pi(\frac{R}{H}(H-h))^2 h}{3}=\frac{\pi}{3}(\frac{R}{H})^2(H^2h+h^3-2h^2H)$, där $0\leq h\leq H$.

Derivation ger $0=V'(h)=\frac{\pi}{3}(\frac{R}{H})^2(H^2+3h^2-4hH) \Rightarrow h^2-\frac{4H}{3}h+\frac{H^2}{3}=0 \Rightarrow h=\frac{4H}{6}\pm\sqrt{(\frac{2H}{3})^2-\frac{H^2}{3}}=H$ eller $H/3$. Tecken studium ger att $h=H/3$ är ett maximum och alltså ger maximal volym för den lilla konen.

6. SSFSSF **a)** Olikheten kan skrivas $|z-(2-i)|<\sqrt{5}$ som geometriskt betyder de tal z i komplexa talplanet som ligger strikt inuti en cirkel med radie $\sqrt{5}$ centrerad i $2-i$. Avståndet från origo till punkten $2-i$ är $\sqrt{5}$ så alla punkter z inuti cirkeln har alltså ett avstånd mindre än $2\sqrt{5}$ till origo; dvs uppfyller $|z|<2\sqrt{5}$, **b)** Ett resultat i kursen säger att om en funktion är deriverbar i en punkt så är den också kontinuerlig där, **c)** Det gäller att $\arccos(\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{\pi}{6}$ så då $\sin\frac{\pi}{6}=1/2$ är påståendet falskt, **d)** Definitionen ger $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin^2 h\sin(1/h)-0}{h}$ och då $0\leq|\frac{\sin^2 h\sin(1/h)}{h}|\leq|\frac{\sin h}{h}||\sin(1/h)||\sin h|\leq|\frac{\sin h}{h}||\sin h|\leq|\frac{\sin h}{h}||h|=|\sin h|\leq|h|\to 0$ ger instängningslagen att $f'(0)=0$, **e)** Låt $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1$. Då gäller $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x}(1-\frac{1}{x})$ och teckenstuditabell visar att $f(1)$ globalt minimivärde så att $0=f(1)\leq f(x)$ för $x>0$; vilket är den första olikheten. Den andra olikheten bevisas på ett snarlikt vis, **f)** Vi har att $\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty \Rightarrow f(\tilde{a})>0$ för ngt $\tilde{a}>a$ tillräckligt nära a. På liknande vis ses att $f(\tilde{b})<0$ för ngt $\tilde{b}<b$ tillräckligt nära b. Då f är kontinuerlig på $[\tilde{a},\tilde{b}]$ gäller enligt satsen om mellanliggande värde att f är noll någnstans på intervallet.

7. Se kursboken.