MATEMATIK
Chalmers

Tentamen i Inledande matematik för E1, (TMV156)
Tid: 2012-08-29, kl 08.30 - 12.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller miniräknare.
Telefonvakt: Magnus Önnheim, tel 0703-088304

Skriv tentamenskoden på varje inlämnat blad.
Betygsgränser: 20 - 29 p ger betyget 3, 30 - 39 p ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.
(Bonuspoäng från hösten 2011 inkluderas.)
Lösningar läggs ut på kursens webbsida tidigast 24/10.
Resultat meddelas via Ladok senast ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Angående granskning, se kursens hemsida www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv156/1112/

---

1. Till denna uppgift ska du **endast lämna in svar**, alltså utan motiveringar.

   a) Förenkla $\dfrac{18^{21}\cdot 420^{18}}{30^{18}\cdot 2^{16}\cdot 126^{15}\cdot 7^{3}\cdot 2^{8}\cdot 3^{11}}$ så långt som möjligt. (2p)

   b) Låt $f(x)=\tan x$. Bestäm $f^{-1}(1)$ om denna storhet existerar. (2p)

   c) För vilka $a\in\mathbb{R}$ saknar ekvationssystemet $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 4\\ 2 & 1 & a & 6\end{array}\right)$ lösning? (2p)

   d) För vilka reella tal x gäller $\sin|\dfrac{x+5}{3-x}|\geq 2\cos\dfrac{\pi}{6}$? (2p)

   e) Derivera $f(x)=e^{\sin^2 x}$. (2p)

   f) Avgör om följande gränsvärden existerar och beräkna dem i så fall: (4p)

   $$i)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x},\qquad ii)\quad \lim_{x\to -\infty}\frac{2x+\sin x}{x-2\ln|x|},\qquad iii)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^2}.$$

Till uppgifterna 2-5 ska du lämna in fullständiga lösningar.

2. a) Finn ekvationen för planet Π som är ortogonalt mot planet $x+y-z=2$ och innehåller linjen genom punkterna $(1,0,-1)$ och $(0,1,1)$. (3p)

   b) Finn på parameterform, linjen ℓ genompunkten $(1,2,1)$ och som är ortogonal mot $x+y-z=2$. (2p)

   c) Var skär linjen ℓ planet Π? (2p)

3. Bestäm värdemängd till funktionen $f(x)=1-\frac{1}{x}-\arctan x$. (6p)

Var god vänd!

4. Rita grafen till funktionen $f(x) = \frac{x^2+5}{x+2}$. Ange speciellt funktionens definitionsmängd och värdemängd, eventuella lokala extrempunkter och asymptoter. (Du behöver inte utreda konvexitet/konkavitet). (6p)

5. En rät cirkulär kon (alltså en 'vanlig kon') med höjden h är inskriven i en större cirkulär kon med höjden H så att spetsen på de lilla konen vilar mot centrum av basen på den stora. Visa att den lilla konens volym blir maximal då $h = \frac{H}{3}$. En kons volym ges av $ah/3$ där a är konens basarea och h är dess höjd. (5p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Du behöver inte motivera dig. Rätt svar ger 1p, inget svar 0p och fel svar -1p. Dock ej mindre än 0p totalt. (6p)

   a) Om z är ett komplext tal sådant att $|z - 2 + i| < \sqrt{5}$, så är $|z| < 2\sqrt{5}$.
   b) Det är inte möjligt att finna en funktion som är deriverbar i $x = 2$ men inte kontinuerlig där.
   c) $\arccos(\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{3}$.
   d) Låt $f(x) = \begin{cases} \sin^2 x \sin\frac{1}{x} & \text{då} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{då} \quad x = 0 \end{cases}$. Då gäller att $f'(0) = 0$.
   e) För $x > 0$ gäller $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$.
   f) Låt $a < b$. Funktionen $f(x) = \frac{1}{(x-a)^4} + \frac{1}{(x-b)^9}$, har ej något nollställe i intervallet (a, b).

7. Visa att om $f'(x) > 0$ i ett intervall I, så är f strängt växande där. (6p)