

Skiss av grafer och bestämma värdemängd

1. Rita grafen till funktionen $f(x) = e^{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)}$

Ange alla eventuella lokala extrempunkter och asymptoter. Du behöver inte utreda var kurvan är konvex/konkav.

$$f(x) = e^{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)}$$

Jämn funktion $\Rightarrow$ behöver bara undersöka $x \geq 0$

Odefinierad vid $x=1$, Inga nollställen. $f(0) = e$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\left(\frac{1}{1-x}\right)} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\left(\frac{1}{1-x}\right)} = e^{\infty} = \infty$$

Sned asymptot $y = ax + b$

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\left(\frac{1}{1-x}\right)}}{x} = \frac{e^0}{\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\left(\frac{1}{1-x}\right)} = e^0 = 1$$

$$f'(x) = e^{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)} \cdot \frac{+1}{(1-x^2)^2} (-2x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2} e^{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)}$$

(udda, kollar fortfarande på $x \geq 0$)

f' odefinierad vid $x=1$

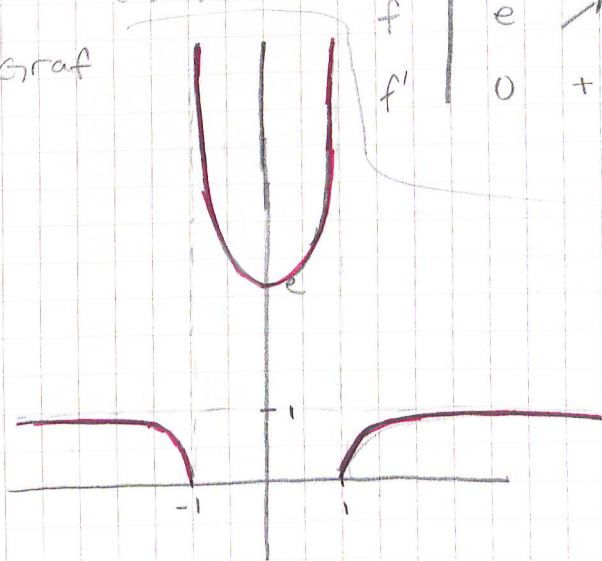
stationär punkt: $x=0$

$$\text{För } x > 0: \left. \begin{array}{l} e^{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)} > 0 \\ (1-x^2)^2 > 0 \\ 2x > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x) > 0$$

Teckentabell
($x \geq 0$)

Graf

x	0	1
f	$e \rightarrow$	odef $\rightarrow$
f'	0	+ odef +



2 Visa att funktionen

$$f(t) = \frac{\tan(t)}{2 + \tan^2(t)}$$

har ett största och minsta värde i intervallet $[0, \frac{\pi}{2})$ och beräkna dessa värden

$$f(t) = \frac{\tan(t)}{2 + \tan^2(t)} = \frac{\frac{\sin(t)}{\cos(t)}}{2 + \frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}} = \frac{\cos(t)\sin(t)}{2\cos^2(t) + \sin^2(t)} = \frac{\cos(t)\sin(t)}{1 + \cos^2(t)}$$

f är kontinuerlig på $[0, \frac{\pi}{2}]$. Enligt Max-min-satsen finns då ett största och ett minsta värde på intervallet $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Problemet är att vi inte har punkten $\frac{\pi}{2}$.

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2}) \cdot \sin(\frac{\pi}{2})}{1 + \cos^2(\frac{\pi}{2})} = \frac{0 \cdot 1}{1 + 0} = 0$$

$$f(0) = \frac{\cos(0) \sin(0)}{1 + \cos^2(0)} = \frac{1 \cdot 0}{1 + 1} = 0$$

Vi har alltså att $f(\frac{\pi}{2}) = f(0)$. Alltså var inte $f(\frac{\pi}{2})$ ett unikt minsta eller största värde på $[0, \frac{\pi}{2}]$. Därmed har vi ett största och ett minsta värde på $[0, \frac{\pi}{2})$.

Hitta det största och det minsta värdet.

För $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ gäller $\tan(t) > 0$, $(2 + \tan^2(t)) > 0$. Därmed har vi att $f(t) > 0$ för $t \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Det betyder att $f(0) = 0$ är det minsta värdet

$$\frac{d}{dt} \tan(t) = \sec^2(t) \quad \left(\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \tan^2(t) = 2 \tan(t) \sec^2(t)$$

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{d}{dt} \frac{\tan(t)}{2 + \tan^2(t)} = \frac{\sec^2(t)(2 + \tan^2(t)) - \tan(t)(2 \tan(t) \sec^2(t))}{(2 + \tan^2(t))^2} = \\ &= \frac{2 \sec^2(t) + \sec^2(t) \tan^2(t) - 2 \tan^2(t) \sec^2(t)}{(2 + \tan^2(t))^2} = \frac{\sec^2(t)(2 - \tan^2(t))}{(2 + \tan^2(t))^2} \end{aligned}$$

$$f'(t) = 0$$

$$\frac{\sec^2(t)(2 - \tan^2(t))}{(2 + \tan^2(t))^2} = 0 \Rightarrow \sec^2(t)(2 - \tan^2(t)) = 0 \Rightarrow 2 - \tan^2(t) = 0$$

$$\Rightarrow \tan^2(t) = 2 \Rightarrow \tan(t) = \sqrt{2} \Rightarrow t = \arctan(\sqrt{2}) \in (0, \frac{\pi}{2})$$

f har sitt största värde vid $\arctan(\sqrt{2})$

$$f(\arctan(\sqrt{2})) = \frac{\tan(\arctan(\sqrt{2}))}{2 + \tan^2(\arctan(\sqrt{2}))} = \frac{\sqrt{2}}{2 + 2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Minsta värde: 0

Största värde: $\frac{\sqrt{2}}{4}$

3 Låt

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & x < 0 \\ e^{-x^2} & x \geq 0 \end{cases}$$

a) Visa att f är inverterbar

b) Bestäm inversens definitionsmängd och värdemängd

c) Ange funktionsuttrycket $f^{-1}(x)$

a) $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ är injektiv

- på $(-\infty, 0)$ tar den värden $(-\frac{\pi}{2}, 0)$

e^{-x^2} är injektiv på $[0, \infty)$

- på $[0, \infty)$ tar den värden $(0, 1]$

$\Rightarrow$ Eftersom det inte är något överlapp av vilka värden som tas på de två definitionsmängderna och f är injektiv inom respektive definitionsmängd så är f injektiv.

$\Rightarrow f$ är inverterbar

b) Definitionsmängd

$$D_{f^{-1}} = V_f = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup (0, 1]$$

Värdemängd

$$V_{f^{-1}} = D_f = (-\infty, \infty)$$

c) $x = \arctan\left(\frac{1}{y}\right) \quad y \in (-\infty, 0) \Rightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$

$$\tan(x) = \frac{1}{y}$$

$$y = \frac{1}{\tan(x)} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{\tan(x)} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

$$x = e^{-y^2} \quad y \in [0, \infty) \Rightarrow x \in (0, 1]$$

$$\ln(x) = -y^2$$

$$y^2 = -\ln(x)$$

$$y = \sqrt{-\ln(x)} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{-\ln(x)} \quad x \in (0, 1]$$

Alltså blir inversen

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\tan(x)} & -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ \sqrt{-\ln(x)} & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

4 Finn om möjligt minimum och maximum av funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 3 + \sin\left(\frac{3}{x+2}\right) & x < -2 \\ \frac{x^2-3}{x+2} & x > -2 \end{cases}$$

$\sin\left(\frac{3}{x+2}\right)$ oscillerar mellan -1 och 1 vilket betyder att $f(x)$ kommer oscillera mellan 2 och 4 då $x < -2$.

Eftersom $\frac{x^2-3}{x+2}$ för $x > -2$ får både mindre och större värden än 2 resp 4 , kan vi se att globalt min och max finns på intervallet

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-3}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 3/x}{1 + 2/x} = \infty$$

Eftersom $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$ finns inget maximum

Vill hitta stationär punkt för $x > -2$ för att hitta minimum

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2-3}{x+2} \right) = \frac{2x(x+2) - (x^2-3) \cdot 1}{(x+2)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2+4x-x^2+3}{(x+2)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad x^2+4x+3=0$$

$$\Rightarrow x = -1, \quad x = -3$$

↖ inte i rätt intervall

$\Rightarrow x = -1$ är globalt minimum

$$\Rightarrow f(-1) = \frac{1-3}{-1+2} = \frac{-2}{1} = -2 \quad \text{är minsta värdet}$$

5 Skissera grafen av funktionen

$$f(x) = \frac{x^2 + 6x + 9}{x - 2}$$

Ange eventuella asymptoter och lokala extrempunkter.
Konvexitet/konkavitet behöver ej utredas.

$$f(x) = \frac{x^2 + 6x + 9}{x - 2} = \frac{(x+3)^2}{x-2}$$

Ingen uppenbar symmetri. f odefinierad vid $x=2$.

$$f(0) = \frac{9}{-2} = -4.5$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{(x+3)^2}{x-2} = 0 \Rightarrow x = -3$$

lodrät asymptot

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x+3)^2}{x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x+3)^2}{x-2} = \infty$$

sned asymptot

$$x \rightarrow \infty \quad y = ax + b$$

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 6/x + 9/x^2}{1 - 2/x} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 6x + 9}{x - 2} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 6x + 9 - x^2 + 2x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x + 9}{x - 2} = 8$$

$x+8$ asymptot till $f(x)$ då $x \rightarrow \infty$

P.s.s. $x+8$ asymptot till $f(x)$ då $x \rightarrow -\infty$

$$f'(x) = \frac{(2x+6)(x-2) - (x^2+6x+9) \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x + 6x - 12 - x^2 - 6x - 9}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x - 21}{(x-2)^2}$$

Kritiska punkter

- f' odef vid $x=2$

- Stationära punkter

$$\frac{x^2 - 4x - 21}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 21 = (x+3)(x-7) = 0 \Rightarrow \underline{x_1 = -3, x_2 = 7}$$

$$f(-3) = 0 \quad f(7) = \frac{49 + 42 + 9}{7 - 2} = \frac{100}{5} = 20$$

Teckentabell

x	-3	2	7
f	$\nearrow 0$	$\searrow$ odef	$\searrow 20 \nearrow$
f'	$+ 0$	$-$ odef	$- 0 +$

graf $\Rightarrow$

Fortsättning uppgift 5

