

Övning 10 - torsdag LV6

RA 4.3.5, 4.3.9
4.3.13, 4.3.17
4.3.33, 4.4.9
4.4.27, 4.4.41

RA 4.3.5

Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1}(x)}{\tan^{-1}(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1}(x)}{\tan^{-1}(x)} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} \stackrel{\text{Höpital}}{=} \frac{1+0^2}{\sqrt{1-0^2}} = 1$$

RA 4.3.9

Beräkna gränsvärdet $\lim_{t \rightarrow \pi} \frac{\sin^2(t)}{t-\pi}$

$$\lim_{t \rightarrow \pi} \frac{\sin^2(t)}{t-\pi} \stackrel{0/0}{=} \lim_{t \rightarrow \pi} \frac{2\sin(t)\cos(t)}{1} = 2 \cdot 0 \cdot (-1) = 0$$

RA 4.3.13

Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \stackrel{0 \cdot 1}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(1/x)}{1/x} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{x^2} \cos(1/x)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

RA 4.3.17

Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2(x)}{\tan(x)-x}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2(x)}{\tan(x)-x} &\stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\sec^2(x)-1} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\cos^2(x)-2\sin^2(x)}{2\sec^2(x)\tan(x)} \\ &\stackrel{\text{Höpital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(2x)}{\sec^2(x)\tan(x)} = \infty \end{aligned}$$

RA 4.3.33

Om f är två gånger deriverbar, evaluera uttrycket

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

Vi använder l'Hôpitals regel (derivera m.a.p h)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) \overset{\text{inre derivata} = -1}{-} f'(x-h)}{2h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x+h) + f''(x-h)}{2} = \frac{2f''(x)}{2} = f''(x)$$

RA 4.4.9

Avgör om funktionen har några lokala eller globala extremvärden

$$f(x) = x^5 + x^3 + 2x \quad x \in (a, b]$$

$$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 2 > 0 \quad \forall x$$

Det betyder att $f(x)$ växer på hela intervallet $(a, b]$. Därmed finns inget minimum. Däremot finns vid $x=b$ ett globalt maximum som har värdet $b^5 + b^3 + 2b$

RA 4.4.27

Hitta och klassificera alla lokala extremvärden till funktionen

$$f(x) = x\sqrt{2-x^2}$$

Avgör om något av dessa är globalt extremvärde. Skissa grafer!

$$f(x) = x\sqrt{2-x^2} \quad (|x| \leq \sqrt{2})$$

$$f'(x) = \sqrt{2-x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{2-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{2-x^2}{\sqrt{2-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}} = \frac{2(1-x^2)}{\sqrt{2-x^2}}$$

Kritiska punkter

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2(1-x^2)}{\sqrt{2-x^2}} = 0 \Rightarrow 1-x^2 = 0 \Rightarrow (1-x)(1+x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 & f(x_1) = -1 \\ x_2 = 1 & f(x_2) = 1 \end{cases}$$



RA 4.4.27 fortsättning

Vi har singulära punkter i $x = -\sqrt{2}$ och $x = \sqrt{2}$

$$x = -\sqrt{2} \Rightarrow f(-\sqrt{2}) = 0$$

$$x = \sqrt{2} \Rightarrow f(\sqrt{2}) = 0$$

Teckentabell

x	$-\sqrt{2}$	-1	1	$\sqrt{2}$
f'	undef	- 0	+ 0	- undef
f	0 lok max	↙ -1 glob min	↘ 1 glob max	↙ 0 lok min

också gränserna
på vårt intervall

RA 4.4.41

Avgör om funktionen

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

har globalt maximum eller globalt minimum. Om möjligt, finn extremvärdena

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x}{x^2+1} = \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^{3/2}} = \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}} > 0$$

Eftersom funktionen är växande för alla x finns varken maximum eller minimum