

RA 4.5.35

Klassifiera de kritiska punkterna till

$$f(x) = x^2 e^{-2x^2}$$

mha. andraderivatan

$$f(x) = x^2 e^{-2x^2}$$

$$f'(x) = 2x e^{-2x^2} + x^2 e^{-2x^2} (-4x) = 2e^{-2x^2} x (1 - 2x^2)$$

Vid kritiska punkter: $f'(x) = 0$

$$\underbrace{2e^{-2x^2}}_{>0} x (1 - 2x^2) = 0$$

$$x(1 - 2x^2) = 0$$

$\Rightarrow$ Kritiska punkter: $x=0$, $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2e^{-2x^2} \cdot (-4x) \cdot x(1 - 2x^2) + 2e^{-2x^2} (1 - 2x^2) + 2e^{-2x^2} \cdot x \cdot (-4x) = \\ &= -8x^2 e^{-2x^2} + 16x^4 e^{-2x^2} + 2e^{-2x^2} - 4x^2 e^{-2x^2} - 8x^2 e^{-2x^2} = \\ &= e^{-2x^2} (2 - 20x^2 + 16x^4) \end{aligned}$$

$x=0$:

$$f''(0) = e^{-2 \cdot 0^2} (2 - 20 \cdot 0^2 + 16 \cdot 0^4) = 2 > 0$$

$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\begin{aligned} f''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= e^{-2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \left(2 - 20 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 16 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4\right) = \\ &= e^{-2 \cdot \frac{1}{2}} \left(2 - 20 \cdot \frac{1}{2} + 16 \cdot \frac{1}{4}\right) = \\ &= e^{-1} (2 - 10 + 4) = -\frac{4}{e} < 0 \end{aligned}$$

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\begin{aligned} f''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= e^{-2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \left(2 - 20 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 16 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4\right) = \\ &= e^{-2 \cdot \frac{1}{2}} \left(2 - 20 \cdot \frac{1}{2} + 16 \cdot \frac{1}{4}\right) = \\ &= e^{-1} (2 - 10 + 4) = -\frac{4}{e} < 0 \end{aligned}$$

Alltså: f har lokalt minimum vid $x=0$ och lokala maxima vid $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ och $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

RA 4.6.23

Skissa grafen till

$$f(x) = \frac{x^5}{(x^2-1)^2}$$

Använd den information du kan få från funktionen samt funktionens första och andraderivata

$$f(x) = \frac{x^5}{(x^2-1)^2}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{5x^4(x^2-1)^2 - x^5 \cdot 2(x^2-1) \cdot 2x}{(x^2-1)^4} = \frac{5x^4(x^2-1) - 4x^6}{(x^2-1)^3} = \\ &= \frac{5x^6 - 5x^4 - 4x^6}{(x^2-1)^3} = \frac{x^4(x^2-5)}{(x^2-1)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(4x^3(x^2-5) + x^4 \cdot 2x)(x^2-1)^3 - x^4(x^2-5) \cdot 3(x^2-1)^2 \cdot 2x}{(x^2-1)^8} = \\ &= \frac{(4x^5 - 20x^3 + 2x^5)(x^2-1) - 6x^5(x^2-5)}{(x^2-1)^4} = \\ &= \frac{6x^7 - 20x^5 - 6x^5 + 20x^3 - 6x^7 + 30x^5}{(x^2-1)^4} = \\ &= \frac{20x^3 + 4x^5}{(x^2-1)^4} = \frac{4x^3(x^2+5)}{(x^2-1)^4} \end{aligned}$$

Undersökning av $f(x)$:

Asymptoter: $x = -1$, $x = 1$

Symmetri: Udda funktion

Nollställen: $x = 0$

Undersökning av $f'(x)$

Kritiska punkter: $x = 0$, $x = \sqrt{5}$, $x = -\sqrt{5}$

Odefinierad: $x = 1$, $x = -1$

Undersökning av $f''(x)$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f(\sqrt{5}) = \frac{25\sqrt{5}}{16}, \quad f(-\sqrt{5}) = -\frac{25\sqrt{5}}{16}$$

RA 4.6.23 fortsättning

Tecken tabell

X	Kritisk punkt $-\sqrt{5}$	Asymptot -1	Kritisk punkt 0	Asymptot 1	Kritisk punkt $\sqrt{5}$
$f(x)$	$-\frac{25\sqrt{5}}{16}$	odef	0	odef	$\frac{25\sqrt{5}}{16}$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$
	$\nearrow$ $\cup$	lok max.	$\searrow$ $\cap$	$\nearrow$ $\cup$	$\searrow$ $\cap$

